

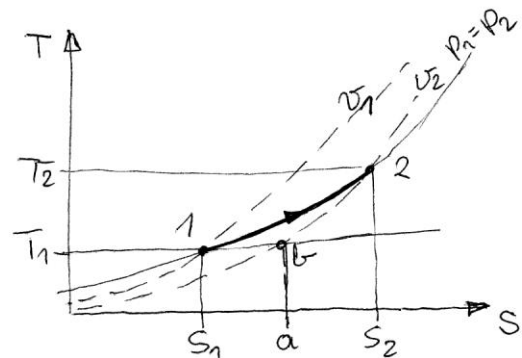
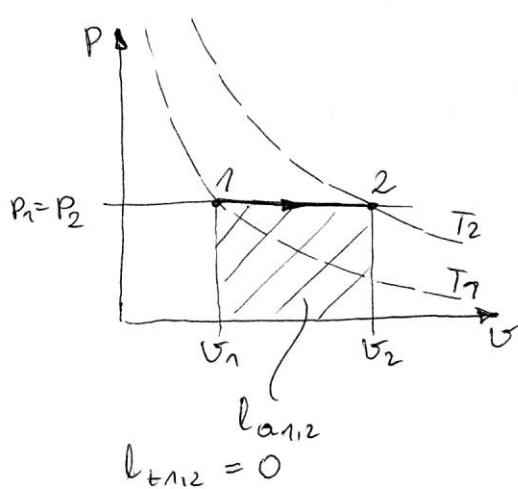
5.4. Przemiana izobaryczna

Przemiana przy stałym ciśnieniu, czyli izobaryczna jest przemianą politropową o wykładniku $m = 0$, gdyż

$$pv^m = pv^0 = p = \text{const.}$$

Przemiana ta zachodzi, gdy ogrzewa się gaz zamknięty w cylindrze tłokiem, stale jednakowo obciążonym, więc np. własnym ciężarem lub ciężarem dodatkowym. Przez ogrzewanie gaz zwiększa swą objętość i tłok unosi się. Przy oziębianiu gaz będzie się kurczył, więc tłok będzie opadać.

Krzywa przemiany izobarycznej nazywana izobarą jest przedstawiona na rys. 5.4.1 w układzie $p - v$ i $T - s$.



$$\begin{aligned} \text{pole } s_1, 1, 2, s_2 &= Q_{1,2} = i_{1,2} \\ \text{pole } a, b, 2, s_2 &= U_{1,2} \\ \text{pole } s_1, 1, 2, b, a &= l_{a,1,2} = e_{p,1,2} \end{aligned}$$

Rys. 5.4.1. Przemiana izobaryczna na wykresie $p - v$ i $T - s$
 $l_{a,1,2}$ – praca absolutna, $q_{1,2}$ – ciepło, $u_{1,2}$ – przyrost energii wewnętrznej,
 $i_{1,2}$ – przyrost entalpii, $e_{1,2}$ – energia przetłaczania

Parametry stanu w przemianie izobarycznej zmieniają się według zależności

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Praca absolutna przemiany wynosi

$$l_{a,1,2} = \int_1^2 p \cdot dv = p \cdot (v_2 - v_1)$$

Praca techniczna wynosi

$$l_{t,1,2} = - \int_1^2 v \cdot dp = 0$$

Zgodnie z definicją, ciepło przemiany wynosi

$$q_{1,2} = c(T_2 - T_1)$$

Wobec tego, że dla przemiany izobarycznej wykładnik politropy $m = 0$ ciepło właściwe c tej przemiany wynosi

$$c = \frac{c_v(m-k)}{m-1} = k \cdot c_v = c_p$$

A zatem, ciepło dostarczone bądź odebrane w przemianie izobarycznej można przedstawić zależnością

$$q_{1,2} = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Wobec tego, że w przemianie izobarycznej $l_{1,2} = 0$, z równania pierwszej zasady termodynamiki w postaci

$$i_{1,2} = q_{1,2} - l_{1,2}$$

wynika, że dostarczone ciepło jest równe przyrostowi entalpii czynnika.

$$q_{1,2} = i_{1,2}$$

Przyrost entropii można wyznaczyć z definicji entropii:

$$ds = \frac{dq}{T}$$

Dla przemiany izobarycznej $dq = c_p \cdot dT$, a zatem

$$s_{1,2} = \int_1^2 \frac{dq}{T} = \int_1^2 \frac{c_p dT}{T} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Przyrost energii wewnętrznej, zgodnie z definicją wynosi

$$u_{1,2} = c_v(T_2 - T_1)$$

Przyrost entalpii, zgodnie z definicją wynosi

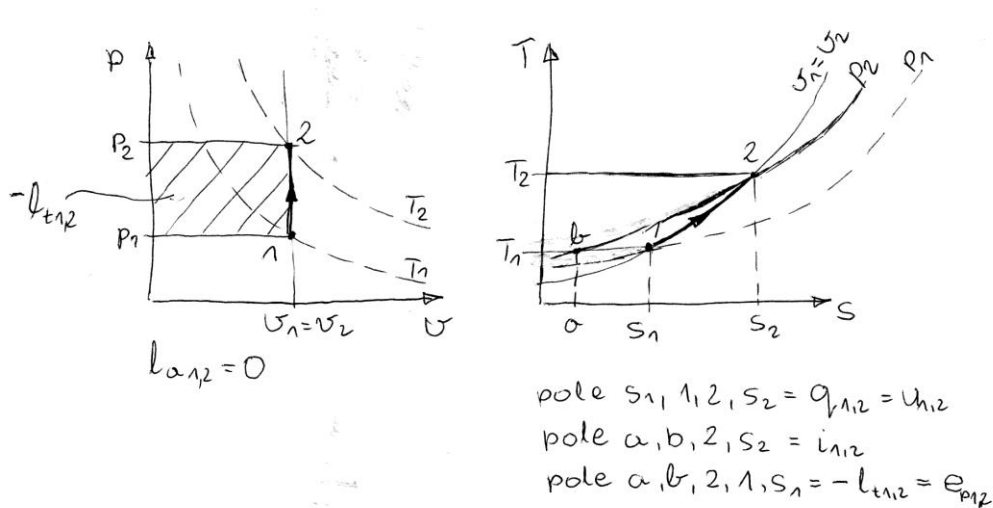
$$i_{1,2} = c_p(T_2 - T_1)$$

5.5. Przemiana izochoryczna

Przemiana przy stałej objętości czyli izochoryczna zachodzi wówczas, gdy mimo zmian temperatury i ciśnienia oraz mimo doprowadzania i odprowadzania ciepła objętość gazu zamkniętego w naczyniu nie ulega zmianie. Przemiana izochoryczna ($v = const.$) jest przemianą politropową o wykładniku $m = \pm \infty$.

Krzywa przemiany izochorycznej nosi nazwę izochory i jest przedstawiona na rys. 5.5.1 w układzie $p - v$ i $T - s$. Parametry stanu gazu w tej przemianie zmieniają się zgodnie z równaniem

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$



Rys. 5.5.1. Przemiana izochoryczna na wykresie $p-v$ i $T-s$
 $l_{t1,2}$ – praca techniczna, $q_{1,2}$ – ciepło, $u_{1,2}$ – przyrost energii wewnętrznej,
 $i_{1,2}$ – przyrost entalpii, $e_{1,2}$ – energia przetłaczania

Praca absolutna przemiany wynosi

$$l_{a1,2} = \int_1^2 p \cdot dv = 0$$

Praca techniczna wynosi

$$l_{t1,2} = - \int_1^2 v \cdot dp = -v \cdot (p_2 - p_1)$$

Zgodnie z definicją, ciepło przemiany wynosi

$$q_{1,2} = c(T_2 - T_1)$$

Wobec tego, że dla przemiany izochorycznej $c = c_v$, otrzymuje się

$$q_{1,2} = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

Wobec tego, że w przemianie izobarycznej $l_{a1,2} = 0$, z równania pierwszej zasady termodynamiki w postaci

$$u_{1,2} = q_{1,2} - l_{a1,2}$$

wynika, że dostarczone ciepło jest równe przyrostowi energii wewnętrznej czynnika.

$$q_{1,2} = u_{1,2}$$

Przyrost entropii można wyznaczyć z definicji entropii:

$$ds = \frac{dq}{T}$$

Dla przemiany izochorycznej $dq = c_v \cdot dT$, a zatem

$$s_{1,2} = \int_1^2 \frac{dq}{T} = \int_1^2 \frac{c_v dT}{T} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Przyrost energii wewnętrznej, zgodnie z definicją wynosi

$$u_{1,2} = c_v(T_2 - T_1)$$

Przyrost entalpii, zgodnie z definicją wynosi

$$i_{1,2} = c_p(T_2 - T_1)$$

5.6. Przemiana izotermiczna

Przemiana przy stałej temperaturze czyli izotermiczna ($T = \text{const.}$) jest przemianą politropową o wykładniku $m = 1$, a więc

$$p \cdot v = \text{const.}$$

Jest równocześnie przemianą przy stałej energii wewnętrznej, tj.

$$u = c_v \cdot T = \text{const.} \quad \text{lub} \quad du = c_v \cdot dt = 0$$

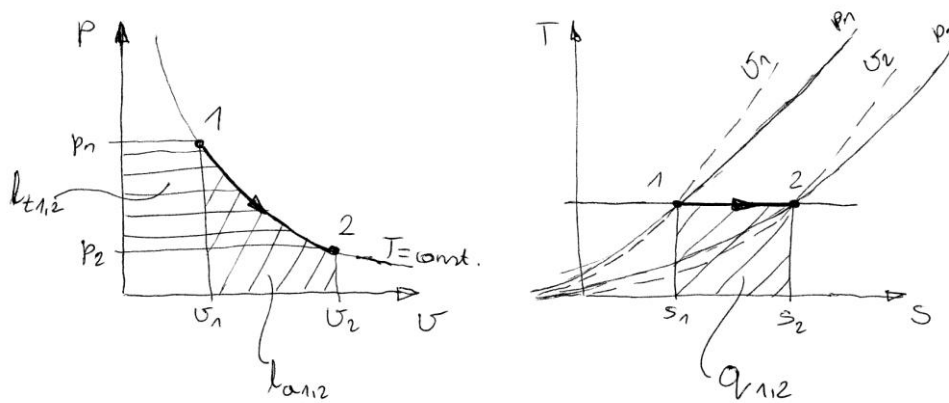
oraz przemianą przy stałej entalpii, tj.

$$i = c_p \cdot T = \text{const.} \quad \text{lub} \quad di = c_p \cdot dt = 0$$

Linia przemiany przedstawiającej przemianę o stałej temperaturze nosi nazwę izotermy i jest przedstawiona na rys. 5.6.1 w układzie $p - v$ i $T - s$. Parametry stanu gazu w tej przemianie zmieniają się zgodnie z równaniem

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 = R \cdot T$$

Izoterma jest więc na wykresie $p - v$ hiperbolą równoosiową.



Rys. 5.6.1. Przemiana izochoryczna na wykresie $p - v$ i $T - s$
 $l_{a1,2}$ – praca absolutna, $l_{t1,2}$ – praca techniczna, $q_{1,2}$ - ciepło

Praca absolutna przemiany wynosi

$$l_{a1,2} = \int_1^2 p \cdot dv$$

Z równania izotermy:

$$p \cdot v = p_1 \cdot v_1 \rightarrow p = \frac{p_1 \cdot v_1}{v}$$

A zatem

$$\begin{aligned}
 l_{a1,2} &= \int_1^2 p_1 \cdot v_1 \cdot \frac{dv}{v} = p_1 \cdot v_1 \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v} = p_1 \cdot v_1 \cdot [\ln v]_{v_1}^{v_2} = \\
 &= p_1 \cdot v_1 \cdot (\ln v_2 - \ln v_1) = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \\
 l_{a1,2} &= R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}
 \end{aligned}$$

Praca techniczna wynosi

$$l_t = - \int_1^2 v \cdot dp$$

Z równania izotermi:

$$p \cdot v = p_1 \cdot v_1 \rightarrow v = \frac{p_1 \cdot v_1}{p}$$

A zatem

$$\begin{aligned}
 l_t &= - \int_1^2 p_1 \cdot v_1 \cdot \frac{dp}{p} = - p_1 \cdot v_1 \cdot \int_1^2 \frac{dp}{p} = - p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \\
 l_{t1,2} &= R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = l_{a1,2}
 \end{aligned}$$

Przyrost energii wewnętrznej, zgodnie z definicją wynosi

$$u_{1,2} = c_v(T_2 - T_1)$$

Ponieważ :

$$T_1 = T_2$$

przyrost energii wewnętrznej w przemianie izotermicznej:

$$u_{1,2} = 0$$

Przyrost entalpii, zgodnie z definicją wynosi

$$i_{1,2} = c_p(T_2 - T_1)$$

Ponieważ :

$$T_1 = T_2$$

przyrost entalpii w przemianie izotermicznej:

$$i_{1,2} = 0$$

Ciepło przemiany można wyznaczyć z równania pierwszej zasady termodynamiki. Wobec tego, że $u_{1,2} = 0$, z pierwszej postaci równania

$$u_{1,2} = q_{1,2} - l_{A1,2}$$

wynika

$$q_{1,2} = l_{a1,2}$$

a wobec $i_{1,2} = 0$, z drugiej postaci równania

$$i_{1,2} = q_{1,2} - l_{t1,2}$$

wynika

$$q_{1,2} = l_{t1,2}$$

A zatem, w przemianie izotermicznej

$$q_{1,2} = l_{a1,2} = l_{t1,2} = R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Przyrost entropii można wyznaczyć z definicji entropii:

$$ds = \frac{dq}{T}$$

a zatem:

$$s_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{T_1} = R \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = R \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

5.7. Przemiana izentropowa

Jest to przemiana odbywająca się bez wymiany ciepła z otoczeniem, czyli przemiana adiabatyczna, w której

$$dq = 0 \quad \text{oraz} \quad q = 0$$

Warunek ten powiązany ze wzorem definicyjnym na entropię, reprezentuje jednocześnie warunek stałej entropii

$$dq = T \cdot ds = 0$$

Ponieważ $T \neq 0$ to $ds = 0$, czyli $s = const.$ przemiana przy stałej entropii nazywa się przemianą izentropową a krzywa przedstawiająca tę przemianę nosi nazwę izentropy. Nie każda jednak przemiana adiabatyczna jest przemianą izentropową. Równoważność obu przemian odnosi się tylko do przemian odwracalnych gazu doskonałego bez wymiany ciepła z otoczeniem, gdy w układzie nie ma wewnętrznych źródeł ciepła wynikłych np. z lepkości.

Pierwsze równanie termodynamiki w odniesieniu do przemiany adiabatycznej przybiera postać

$$0 = du + p dv = c_v dT + p dv \quad (5.7.1)$$

Z równania $\frac{c_p}{c_v} = k$ oraz $c_p - c_v = R$ obliczone c_v ma wartość

$$c_v = \frac{R}{k-1}$$

a po wstawieniu tej wartości do równania (5.7.1) otrzymuje się

$$\frac{R}{k-1} dT + p dv = 0$$

a po przekształceniu

$$R dT + (k-1) p dv = 0 \quad (5.7.2)$$

Różniczkując równanie $pv=RT$, otrzymuje się

$$p dv + v dp = R dT$$

i podstawiając do (5.7.2) wartość $R dT$ otrzymuje się

$$p \cdot dv + v \cdot dp + (k-1) \cdot p \cdot dv = 0$$

Stąd

$$v \cdot dp + k \cdot p \cdot dv = 0$$

lub ostatecznie

$$\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} = 0$$

Jest to równanie różniczkowe adiabaty. Całkując to równanie przy założeniu, że $k = const.$ otrzymuje się równanie

$$\ln \frac{p_2}{p_1} + k \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = 0$$

lub

$$\ln p_2 - \ln p_1 + k \cdot \ln v_2 - k \cdot \ln v_1 = 0$$

skąd

$$p_1 \cdot v_1^k = p_2 \cdot v_2^k = const. \quad (5.7.3)$$

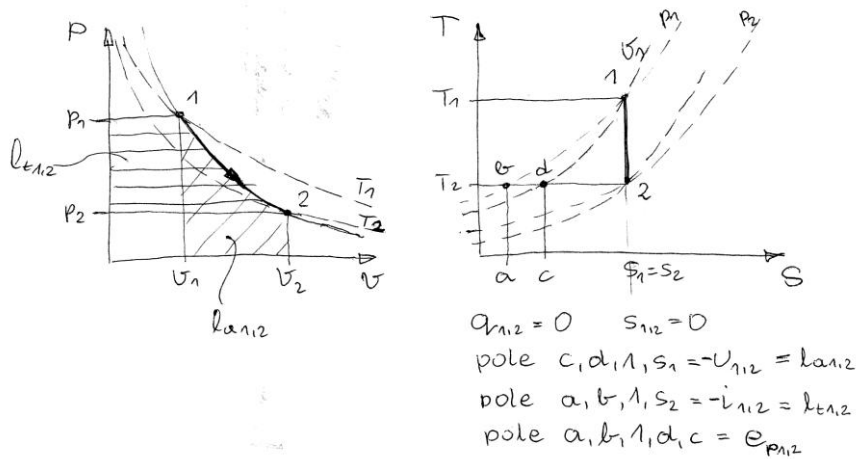
A więc jest to postać przemiany politropowej, dla której $m = k$.

Adiabata w układzie $p - v$ jest hiperbolą nierównoboczną przebiegającą bardziej stromo niż izoterma. Jest przedstawiona na rys. 5.7.1 w układzie $p - v$ i $T - s$.

Korzystając z równania stanu gazu można w równaniu (5.7.3) wyeliminować kolejno jeden z parametrów i zastąpić go temperaturą. Po dokonaniu przekształceń otrzymuje się równanie przemiany izentropowej w następujących postaciach

$$T_1 \cdot v_1^{(k-1)} = T_2 \cdot v_2^{(k-1)}$$

$$T_1 \cdot p_1^{\frac{1-k}{k}} = T_2 \cdot p_2^{\frac{1-k}{k}}$$



Rys. 5.7.1. Przemiana izentropowa na wykresie $p-v$ i $T-s$
 $l_{a,1,2}$ – praca absolutna, $l_{t,1,2}$ – praca techniczna, $u_{1,2}$ – przyrost energii wewnętrznej,
 $i_{1,2}$ – przyrost entalpii, $e_{1,2}$ – przyrost energii przetłaczania

Praca absolutna przemiany wynosi

$$l_{a,1,2} = \int_1^2 p \cdot dv$$

Z równania izentropy

$$p \cdot v^k = p_1 \cdot v_1^k \rightarrow p = \frac{p_1 \cdot v_1^k}{v^k}$$

$$l_{a,1,2} = \int_1^2 p_1 \cdot v_1^k \cdot \frac{dv}{v^k} = p_1 \cdot v_1^k \cdot \int_1^2 v^{-k} dv$$

Wiadomo, że: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

$$\text{A zatem: } \int_1^2 v^{-k} dv = \left[\frac{v^{-k+1}}{-k+1} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{1-k} [v_2^{(-k+1)} - v_1^{(-k+1)}]$$

$$\begin{aligned} l_{a,1,2} &= p_1 \cdot v_1^k \cdot \frac{1}{1-k} [v_2^{(-k+1)} - v_1^{(-k+1)}] = \frac{1}{1-k} [p_1 \cdot v_1^k \cdot v_2^{(-k+1)} - p_1 \cdot v_1^k \cdot v_1^{(-k+1)}] = \\ &= \frac{1}{1-k} [p_2 \cdot v_2^k \cdot v_2^{(-k+1)} - p_1 \cdot v_1^k \cdot v_1^{(-k+1)}] = \frac{1}{1-k} (p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1) = \frac{R}{1-k} (T_2 - T_1) = -c_v (T_2 - T_1) = -u_{1,2} \end{aligned}$$

$$l_{a,1,2} = \frac{R}{1-k} (T_2 - T_1) = -u_{1,2}$$

Praca techniczna wynosi

$$l_t = - \int_1^2 v \cdot dp$$

Zrównania izentropy: $p \cdot v^k = p_1 \cdot v_1^k \rightarrow v = \frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{p^{\frac{1}{k}}} \cdot v_1$

$$l_t = - \int_1^2 p_1^{\frac{1}{k}} \cdot v_1 \cdot \frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = - p_1^{\frac{1}{k}} \cdot v_1 \int_1^2 p^{-\frac{1}{k}} dp$$

$$\int_1^2 p^{-\frac{1}{k}} dp = \left[\frac{p^{-\frac{1}{k}+1}}{-\frac{1}{k}+1} \right]_{p_1}^{p_2} = \frac{1}{-\frac{1}{k}+1} \left[p_2^{-\frac{1}{k}+1} - p_1^{-\frac{1}{k}+1} \right] = \frac{k}{k-1} \left[p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

$$l_{t1,2} = - p_1^{\frac{1}{k}} \cdot v_1 \cdot \frac{k}{k-1} \left[p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}} \right] = - \frac{k}{k-1} \left[p_1^{\frac{1}{k}} \cdot v_1 \cdot p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{1}{k}} \cdot v_1 \cdot p_1^{\frac{k-1}{k}} \right] = - \frac{k}{k-1} [p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1] =$$

$$= \frac{k}{1-k} (p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1) = \frac{k}{1-k} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = -c_p \cdot (T_2 - T_1) = -i_{1,2}$$

$$l_{t1,2} = \frac{k \cdot R}{1-k} (T_2 - T_1) = -k \cdot u_{1,2} = -i_{1,2}$$

Ciepło przemiany, zgodnie z definicją:

$$q_{1,2} = c(T_2 - T_1)$$

Wobec tego, że $c=0$:

$$q_{1,2} = 0$$

Przyrost entropii, zgodnie z definicją:

$$ds = \frac{dq}{T}$$

Wobec tego, że $c=0$, $q_{1,2}=0$:

$$s_{1,2} = 0$$

Przyrost energii wewnętrznej, zgodnie z definicją:

$$u_{1,2} = c_v(T_2 - T_1)$$

Przyrost entalpii, zgodnie z definicją:

$$i_{1,2} = c_p(T_2 - T_1)$$