

# **MECHANIKA PŁYNÓW**

**Materiały pomocnicze do wykładów**

**opracował: prof. nzw. dr hab. inż. Wiesław Grzesikiewicz**

**Warszawa, październik 2011**

# Mechanika płynów

dział mechaniki materialnych ośrodków ciągłych

- odkształcalne ciało stałe

- płyny  $\begin{cases} \text{ciecze} \\ \text{gazy} \end{cases}$

mechanika zajmuje się badaniem ruchu ośrodka oraz działających na niego sił.

Badanie ruchu odbywa się w czasoprzestrzeni Galileusza.

W mechanice posługujemy się modelami (idealizacją) rzeczywistych ciał materialnych.

Podstawowa zasad tej idealizacji polega na pominięciu cząsteczkowej struktury materii i przyjęciu ciągłego rozkładu materii w przestrzeni fizycznej (ciągłe wypełnienie przestrzeni – kontinuum).

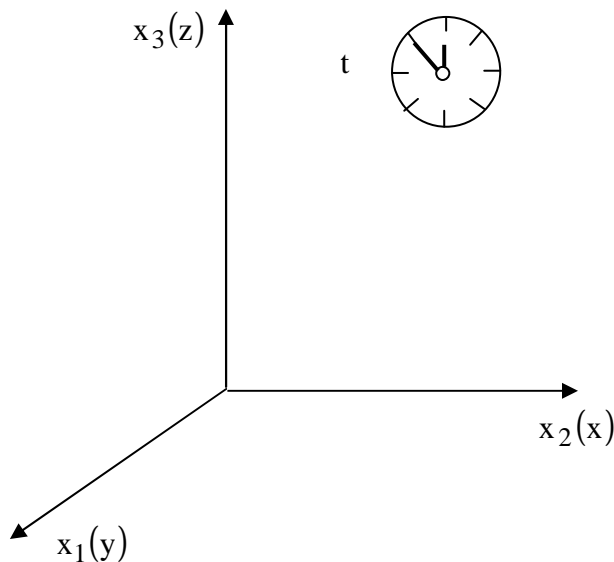
Metody mechaniki płynów

- modelowanie: fizyczne, matematyczne, komputerowe.

Modelowanie matematyczne: ustalanie matematycznych formuł, za pomocą których odwzorowuje się (opisuje) związki między wielkościami fizycznymi określającymi rozpatrywany aspekt rzeczywistości;

w mechanice płynów są to wielkości fizyczne, za pomocą których określa się procesy akumulowania i rozpraszania energii płynu.

Zasady matematycznego opisu ośrodków ciągłych



Czasoprzestrzeń Galileusza  
/układ inercjalny, czas absolutny/  
układ współrzędnych prawoskrętny  
/zwykle prostokątny

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ opis współrzędnych przestrzennych}$$

znak definicji

$(t, \mathbf{x})$  - opis punktu czasoprzestrzeni (zdarzenia) określa chwilę i miejsce.

## Wielkości fizyczne

Właściwości ośrodka ciągłego są określane w każdym punkcie rozważanego obszaru czasoprzestrzeni, za pomocą funkcji

$$w(t, x)$$

$w$  – funkcja określająca obserwowaną wielkość fizyczną np.: temperatura, gęstość, prędkość itp.

Do opisu wielkości fizycznych używa się różnych funkcji

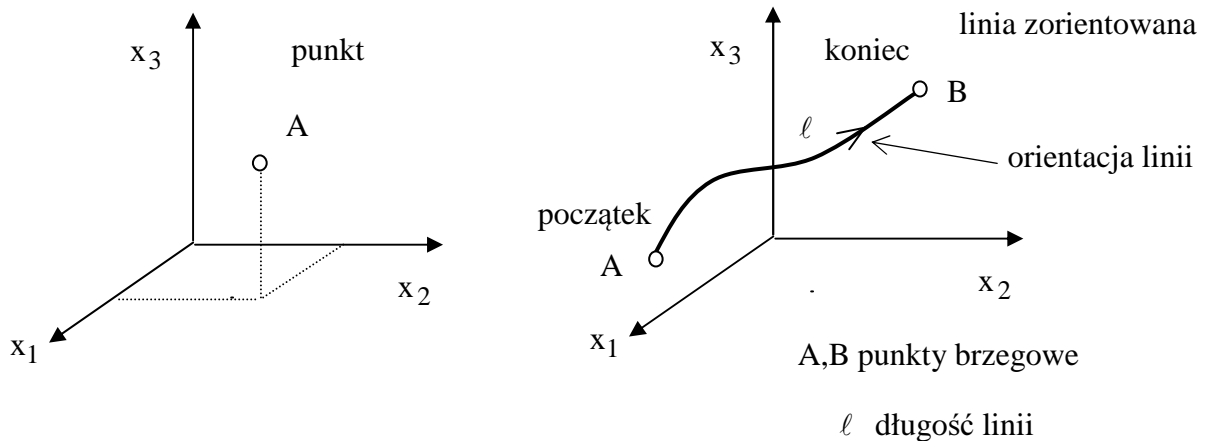
- skalarnej  $w : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $w(t, x) \in \mathbb{R}^1$
- wektorowej  $w : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $w(t, x) \in \mathbb{R}^3$

$$w(t, x) := \begin{bmatrix} w_1(t, x) \\ w_2(t, x) \\ w_3(t, x) \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{trzy funkcje skalarne } w_i(t, x) \quad i = 1, 2, 3$$

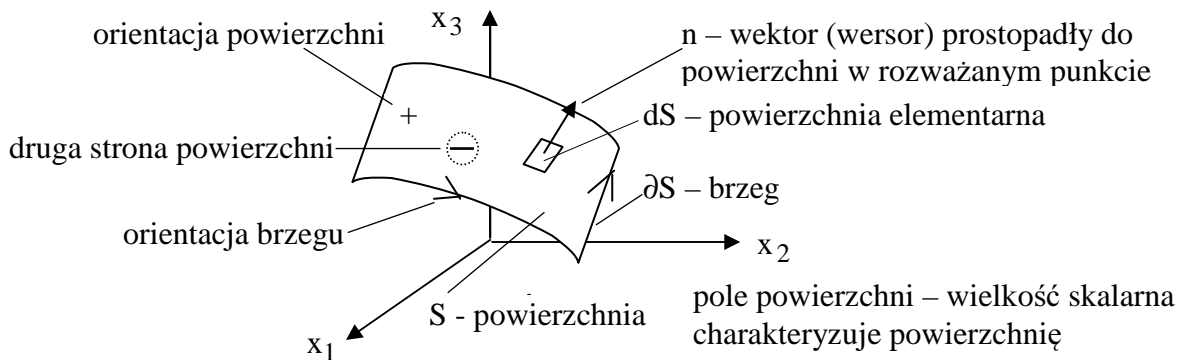
- macierzowej  $w : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $w(t, x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

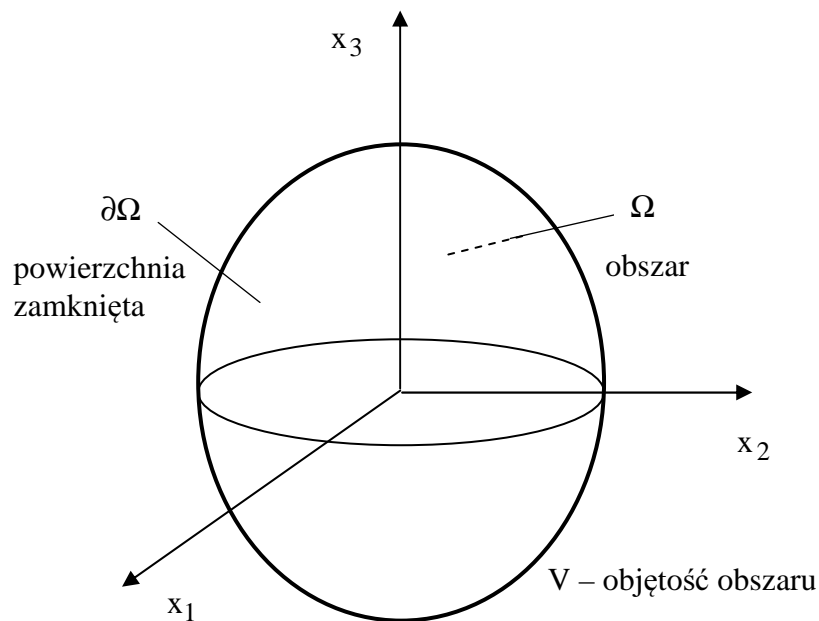
$$w(t, x) := \begin{bmatrix} w_{11}(t, x), w_{12}(t, x), w_{13}(t, x) \\ w_{21}(t, x), w_{22}(t, x), w_{23}(t, x) \\ w_{31}(t, x), w_{32}(t, x), w_{33}(t, x) \end{bmatrix}$$

Podstawowe obiekty geometryczne w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$

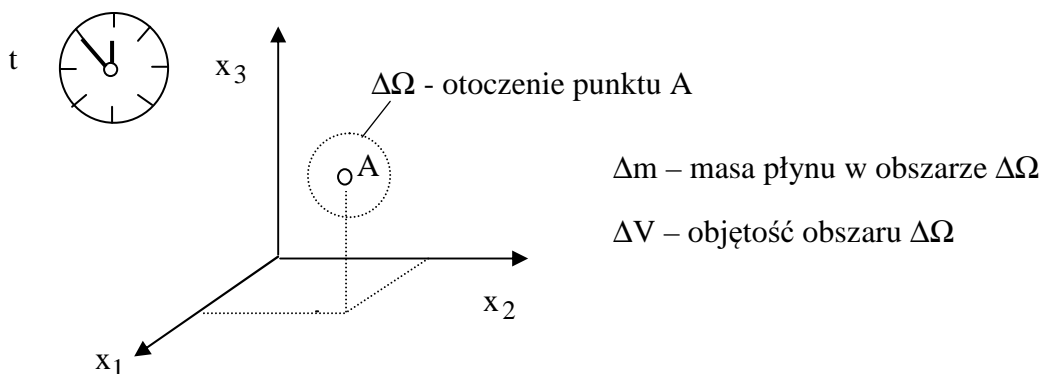


powierzchnia zorientowana /płat powierzchni/





Gęstość masy płynu w punkcie A



$$\rho(t, \mathbf{x}) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$\rho =$  olej 833, benzyna 740, woda 1000, alkohol 790, mleko 1300;

ciężar właściwy -  $\gamma := \rho g$      $g$  - przyspieszenie ziemskie

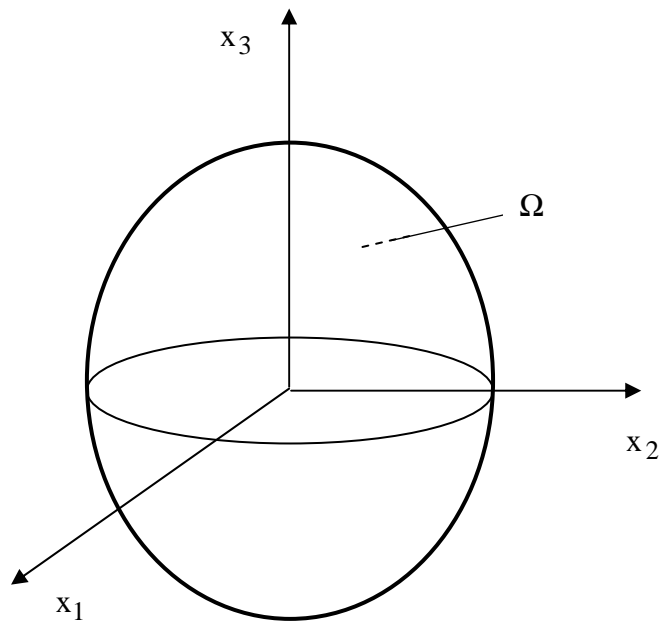
objętość właściwa -  $v = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$

Dane pole gęstości płynu, tzn. jest dana funkcja  $(t, \mathbf{x})$  określająca wielkość fizyczną

$\rho(t, \mathbf{x})$

$\Omega$  - obszar

obliczyć masę płynu  $m_\Omega$  wypełniającego obszar  $\Omega$  w chwili  $t$



$$m_\Omega(t) = \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) dV$$

całka objętościowa z funkcji skalarnej

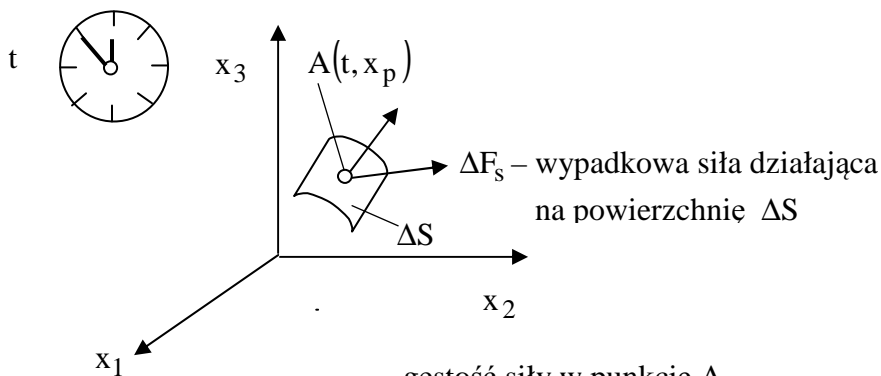
### Pola sił

siły: - wewnętrzne; określają oddziaływanie między częściami ośrodka materialnego  
 - zewnętrzne; określają oddziaływania otoczenia na ośrodek

siły: - powierzchniowe (kontaktowe) odnosi się do powierzchni skierowanej  
 - objętościowe (lub masowe) odnosi się do obszaru (lub masy płynu wypełniającego obszar)

### Gęstość siły

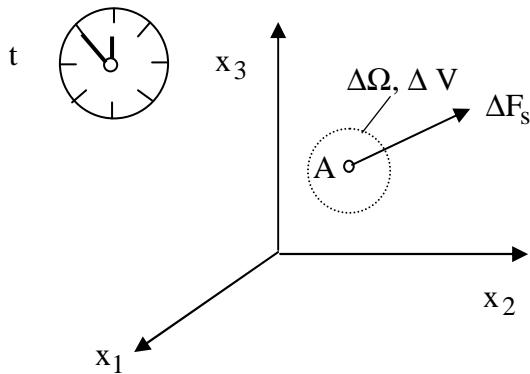
Powierzchniowa  $f_p \left[ \frac{N}{m^2} \right]$



gęstość siły w punkcie A

$$f_p(t, \mathbf{x}_A) := \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta S}$$

Objętościowa (masowa) gęstość siły  $f_v$



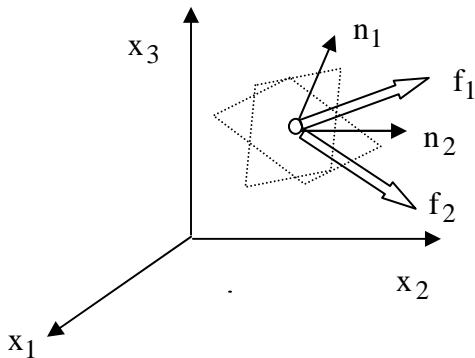
objętościowa gęstość siły

$$f_v(t, x_A) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_v}{\Delta V}, \quad f_v \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$$

masowa gęstość siły  $f_m := \frac{f_v}{\rho} \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \right] = \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

Sily wewnętrzne  
Powierzchniowa gęstość siły  
**NAPRĘŻENIE**  
wektor i tensor naprężenia

Powierzchniowa gęstość siły lub wektor naprężenia zależy od punktu czasoprzestrzeni oraz kierunku powierzchni



$n$  – wyznacza kierunek  
prostopadły do powierzchni  
 $f$  – siła (gęstość) powierzchniowa  
(wektor naprężenia)  
 $\|n\|_2 = 1$  - wersor

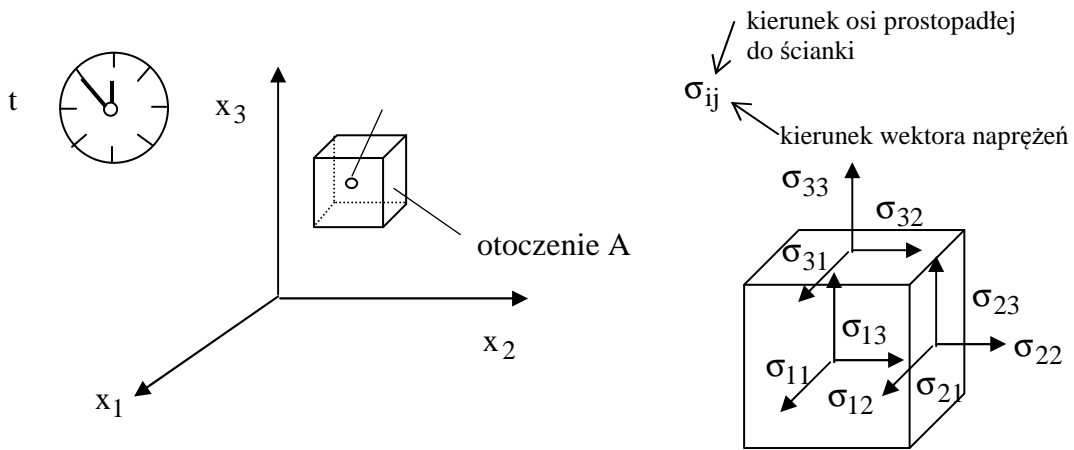
wektor naprężenia opisuje się za pomocą tensora naprężenia

$$\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

według zależności

$$f_A^{(n)} := \sigma^T n$$

$n$  wersor określający kierunek prostopadły do powierzchni.  
Tensor naprężenia w punkcie A

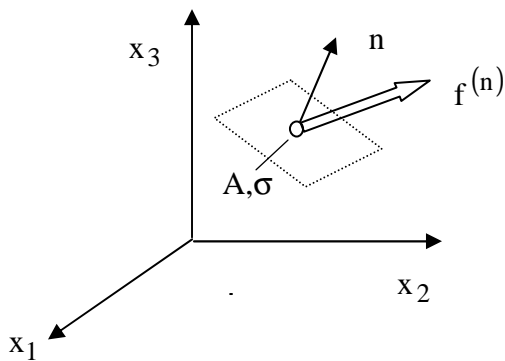


tensor naprężeń jest symetryczny, tzn.  $\sigma = \sigma^T$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \sigma := \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

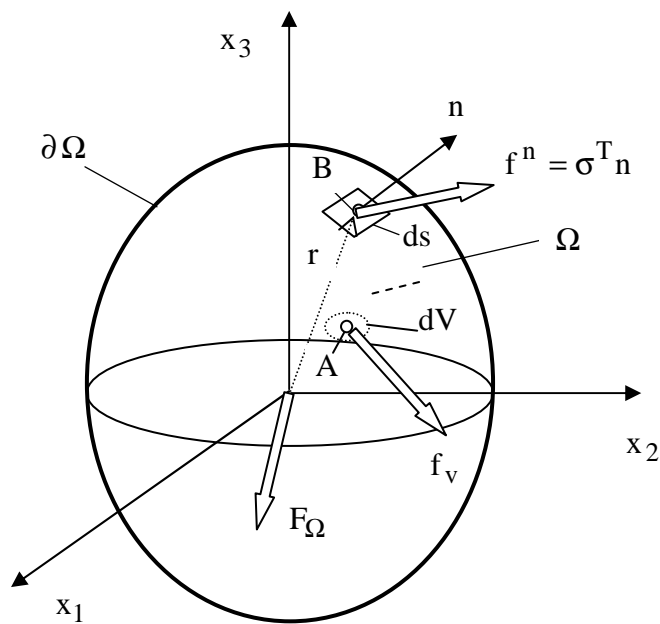
$\sigma_{ij}$  ← indeks wiersza  
 $\sigma_{ij}$  ← indeks kolumny

Dane pole naprężeń wyznaczyć wektor naprężeń działający w punkcie A na powierzchni określonej wektorem n.



$$f_A^{(n)} = \sigma^T n$$

Dane pole naprężeń  $\sigma$  i gęstość sił objętościowych  $f_v$ . Wyznaczyć siłę wypadkową działającą na płyn (ośrodek materialny) wypełniający obszar  $\Omega$ .



$B \in Fr \Omega$  - leży na brzegu  $\Omega$   
 $A \in Int \Omega$  - leży wewnątrz obszaru  $\Omega$   
 $f_v$  - siła objętościowa (gęstość)  $\left[ \frac{N}{m^3} \right]$   
 $f_p$  - siła powierzchniowa  $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$   
 $F_\Omega$  - siła wypadkowa [N]  
 $\sigma$  - tensor naprężeń

$$F_\Omega(t) := \int_{\partial\Omega} \sigma^T n dS + \int_{\Omega} f_v dV$$

Obliczyć moment wypadkowy sił względem środka układu współrzędnych ( $M_\Omega$ )

$r$  – promień określający punkt obszaru  $\Omega$       $r = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$M_\Omega(t) := \int_{\partial\Omega} (r \times \sigma^T n) dS + \int_{\Omega} (r \times f_v) dV$$

Rozkład tensora naprężeń

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_o & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_o & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_o \end{bmatrix}$$

skalar  $\begin{cases} \sigma_o := \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \sigma_o = \frac{1}{3} tr \sigma \end{cases}$  ,      $tr \sigma := \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  (suma w przekątnej)



$$I := \begin{bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \sigma_0 I + \sigma_S$$

$$\sigma_S := \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

składowa tensora naprężeń  
nazywana dewiatorem naprężeń

$\sigma_0 I$  - składowa nazywana tensorem kulistym

tensor kulisty  
określa wszechstronne (izotropowe)  
rozciąganie lub ściskanie.  
W płynach w stanie statycznym może  
powstawać tylko ściskanie, czyli  
 $\sigma_0 < 0$   
(hipoteza Pascala) wobec tego przyjęto  
nazywać ciśnieniem  $p$

$$p := -\sigma_0$$

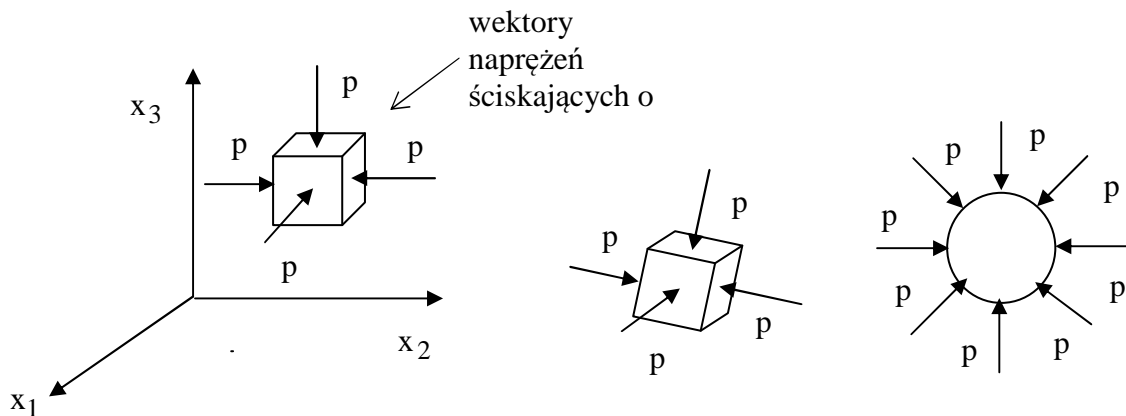
$$\sigma = -pI$$

dewiator naprężeń  
określa naprężenia ścinające, które w  
ośrodkach ciągłych wywołują zmianę  
kształtu.  
W płynach w stanie statycznym (hipoteza  
Pascala) dewiator naprężeń jest równy zero.

$$\sigma_S = 0$$

### Statyczny stan naprężenia w płynach (według hipotezy Pascala)

$$\sigma = pI = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad p - \text{ciśnienie; } p > 0; \quad p - \text{skalar}$$



wektor naprężenia (ciśnienia)

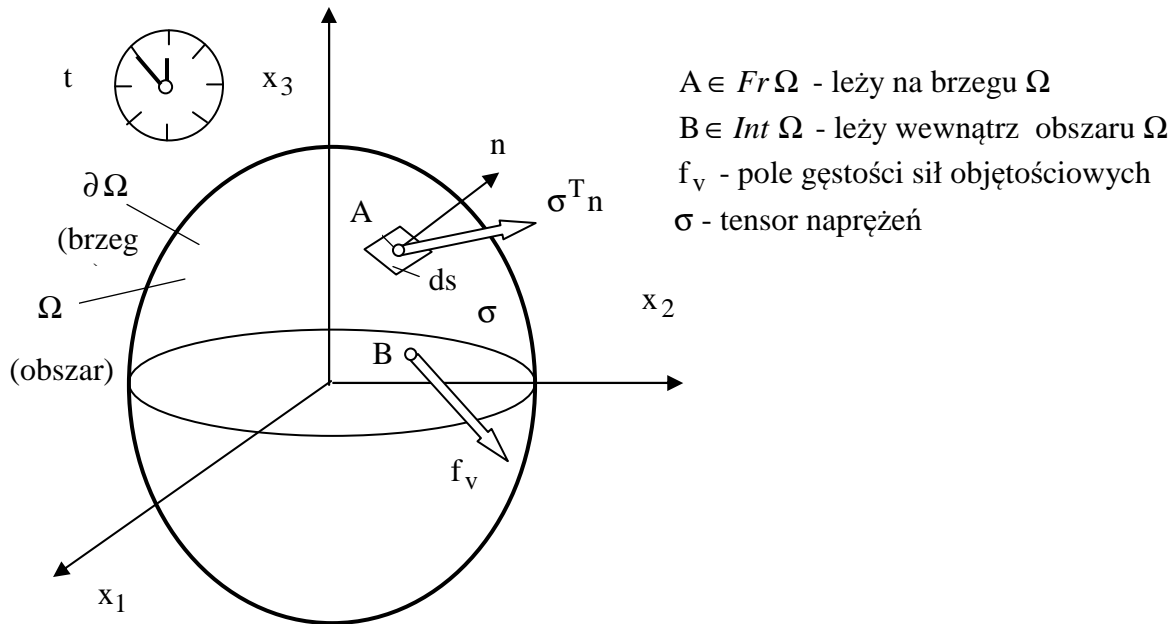
$$f_p = \sigma^T n = -pIn = -pn$$

$$f_p = -pn$$

$$p > 0$$

wektor ciśnienia w każdym kierunku ma wartość  $-pn$  czyli działa prostopadle do każdej powierzchni a znak minus oznacza, że są to naprężenia ściskające.

### Równowaga ośrodka materialnego w polu sił



Wypadkowa siła działająca na ośrodek materialny (płyn) wypełniający obszar  $\Omega$  w chwili  $t$

$$F_{\Omega}(t) := \int_{\partial\Omega} \sigma^T n \, dS + \int_{\Omega} f_v \, dV .$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

$$\int_{\partial\Omega} \sigma^T n \, dS = \int_{\Omega} Div \sigma \, dV$$

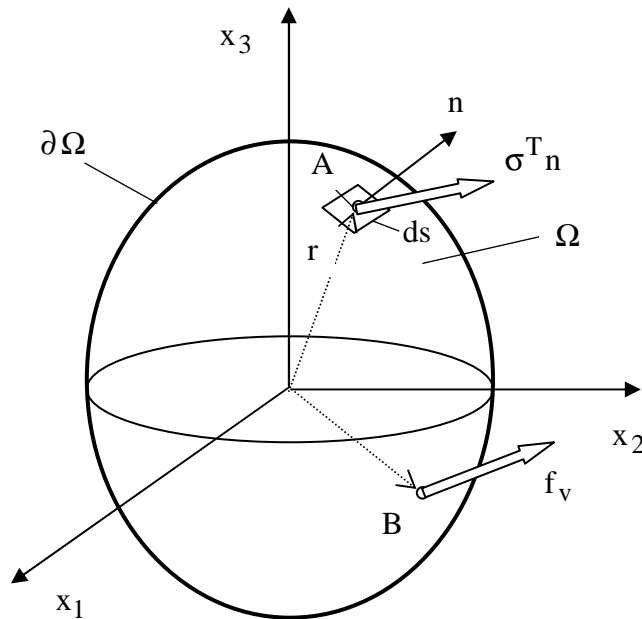
$$F_{\Omega}(t) = \int_{\Omega} (Div \sigma + f_v) \, dV = 0, \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Stąd równanie Eulera

$$Div \sigma + f_v = 0$$

równanie równowagi płynu, które powinno być spełnione dla każdego  $x$  oraz  $t$

## Równanie momentów sił



Wypadkowy moment sił względem początku układu współrzędnych

$$M_{\Omega}(t) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_v) dV$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}) dS = \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \text{Div } \boldsymbol{\sigma}) dV$$

Wzór na wypadkowy moment

$$M_{\Omega}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times (\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v) dV$$

Jeżeli jest spełnione równanie równowagi sił (równanie Eulera)

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = 0,$$

to wtedy wypadkowy moment sił jest równy zero.

## Warunki równowagi płynu

W stanie spoczynku zgodnie z hipotezą Pascala

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad p > 0 \quad \text{- ciśnienie skalar}$$

stąd

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = -\text{grad } p$$

Równanie równowagi płynu

$$-\text{grad } p + \mathbf{f}_v = 0$$

lub

$$\text{grad } p = \mathbf{f}_v.$$

## Zadanie statyki płynu (hydrostatyka)

Dane jest pole objętościowej gęstości siły  $f_v$ . Wyznaczyć pole ciśnienia  $p$  w obszarze  $\Omega$  uwzględniając zadane warunki brzegowe.

Równanie względem funkcji skalarnej  $p(x)$

$$\text{grad } p = f_v$$

a po rozpisaniu mamy trzy równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= f_{v_1}(x) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= f_{v_2}(x) \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= f_{v_3}(x) \end{aligned} \quad [f_v] = \frac{N}{m^3} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Powyższy zestaw trzech równań względem jednej funkcji ( $p$ ) posiada rozwiązanie tylko wtedy, gdy  $f_v$  jest potencjalna, czyli gdy istnieje funkcja skalarna  $U(x)$  taka, że

$$f_v(x) = \text{grad } U(x)$$

czyli  $f_v$  nie może być dowolna.

Rozwiązanie zadania statyki ma wtedy postać

$$p(x) = U(x) + C$$

Stałą  $C$  wyznacza się z warunków brzegowych.

Podstawowe przykłady funkcji  $f_v$

\* stała

$$f_v = \text{const} \quad U = f_v^T x$$

$$\text{stąd mamy} \quad p = f_v^T x + C$$

czyli

$$p(x) = f_{v_1}(x) + f_{v_2}(x) + f_{v_3}(x) + C$$

\* liniowa

$$f_v = Ax, \quad A - \text{macierz symetryczna} \quad U = \frac{1}{2} x^T Ax$$

$$p = \frac{1}{2} x^T Ax + C$$

$$f_v = Ax + f_v \quad p = \frac{1}{2} x^T Ax + f_v^T x + C$$

Zwykle w zadaniach statyki płynów wyznacza się opis pola sił za pomocą pola gęstości sił

$$\text{masowych } f_m \quad \left[ \frac{N}{kg} \right] \equiv \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

wtedy

$$f_v = \rho f_m \quad \rho - \text{gęstość płynu} \quad \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

równanie równowagi płynu ma wtedy postać

$$\text{grad } p = \rho f_m .$$

Rodzaje płynów ze względu na funkcję gęstości  $\rho$

\* płyn jednorodny nieściśliwy

$$\rho = \text{const} \quad (\text{ciecz})$$

\* płyn niejednorodny nieściśliwy

$$\rho(x) - \text{dana} \quad (\text{ciecz})$$

\* płyn barotropowy ściśliwy (gęstość płynu zależy od ciśnienia; nie zależy od temperatury)

$$\rho = \varphi(p) \quad \varphi - \text{funkcja opisująca zależność gęstości płynu od ciśnienia.}$$

### Opis cech płynu barotropowego

$$\rho = \varphi(p)$$

zwykle

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$\rho_0, p_0$  - stan odniesienia

$$\gamma = \begin{cases} 1 \div 1,4 - \text{gaz} \\ 400 \div 2000 - \text{ciecz} \end{cases}$$

Wskaźniki charakteryzujące ściśliwość płynu

$$* \beta := \frac{d}{dp} \ln \frac{\varphi(p)}{\varphi(p_0)} = \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)} - \text{współczynnik ściśliwości} \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \right]$$

$$\text{ale} \quad \varphi'(p) = \frac{1}{\gamma p} \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \left[ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right]$$

czyli

$$\beta = \frac{1}{\gamma p} \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \right]$$

\* moduł sprężystości objętościowej

$$B := \frac{1}{\beta} = \gamma p \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

\* kwadrat prędkości dźwięku

$$c^2 := \frac{d}{d\rho} \varphi^{-1}(\rho) \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad p = \varphi^{-1}(\rho), \quad \varphi^{-1}(\rho) = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$c^2 = \frac{B}{\rho} \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right].$$

## ZADANIE STATYKI PŁYNU BAROTROPOWEGO

$$f_v = \rho f_m \quad f_m \left[ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \right] = \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad \rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

zadanie: wyznaczyć funkcje  $p$  oraz  $\rho$ ; dane  $f_m$  - spełniające równania

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{f}_m \quad \Leftarrow \text{równanie wektorowe}$$

$$\rho = \varphi(p)$$

nowa postać równania

$$\frac{\mathbf{grad} p}{\varphi(p)} = \mathbf{f}_m$$

wyrażenie  $\frac{\mathbf{grad} p}{\varphi(p)} = \mathbf{grad} \mathcal{P}(p(x)) \quad \mathbf{grad} \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \mathbf{grad}_x p(x)$

jeśli

$$\mathcal{P}(p) := \int_{p_0}^p \frac{1}{\varphi(\tilde{p})} d\tilde{p} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

wtedy równanie statyki ma postać

$$\mathbf{grad} \mathcal{P}(p) = \mathbf{f}_m$$

rozwiązanie istnieje gdy  $\mathbf{f}_m = \mathbf{grad} U_m(x)$

rozwiązanie

$$\mathcal{P}(p) = U_m(x) + C \quad \text{nieliniowe równanie algebraiczne względem } p$$

$$p = \mathcal{P}^{-1}(U_m(x) + C).$$

### Przykłady płynów barotropowych

\* nieściśliwy  $\rho = \text{const.}$

$$\mathcal{P}(p) := \int_{p_0}^p \frac{d\tilde{p}}{\rho} = \frac{p - p_0}{\rho}$$

\* izotermiczny (gaz  $\gamma = 1$ )  $\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$

$$\mathcal{P}(p) := \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0}$$

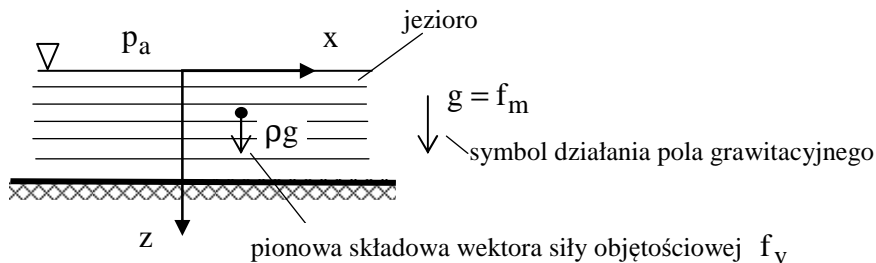
\* adiabatyczny  $p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa$

$$\mathcal{P}(p) := -\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right].$$

Przykład wyznaczania funkcji p opisującej ciśnienie

Założenie: ciecz (woda) jednorodna, nieściśliwa  $\rho = \text{const}$

$p_a$  - ciśnienie atmosferyczne na powierzchni



$$f_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{bmatrix}, \quad U = \rho g z$$

równanie statyki

$$\text{grad } p = f_v$$

czyli

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

warunek brzegowy  $p(0,0,0) = p_a$

w tym szczególnym przypadku ciśnienie zależy tylko od z

$$p(z) = \rho g z + C$$

stałą całkowania C wyznaczamy z warunku brzegowego

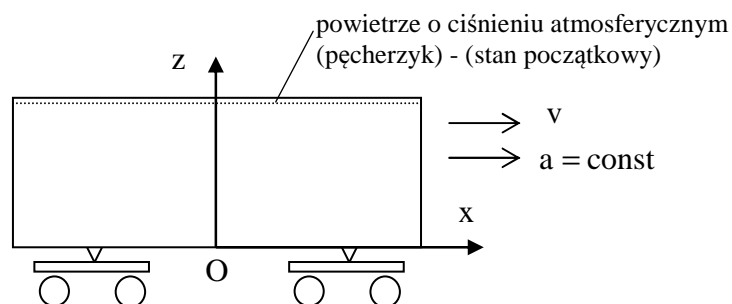
$$p(0) = p_a$$

$$p_a = \rho g \cdot 0 + C \quad \text{stąd} \quad C = p_a$$

$$p(z) = \rho g z + p_a$$

### Funkcja ciśnienia w polu przyspieszeń

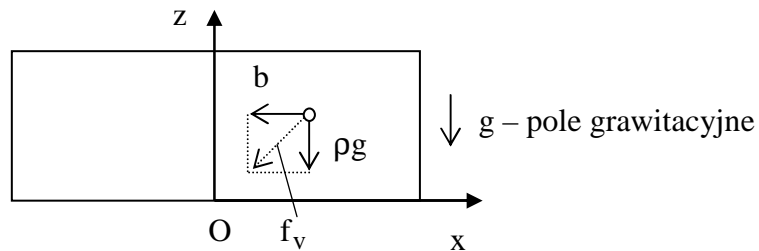
Rozważamy cysternę kolejową, która porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a



płyn wypełniający cysternę jest nieściśliwy jednorodny

$$\rho = \text{const} .$$

Układ współrzędnych związanych ze zbiornikiem cysterny; jest to układ nieinercyjny, w tym układzie na płyn działa pole grawitacyjne oraz pole inercyjne o wartości  $b = \rho a$  przeciwnie skierowane do przyspieszenia  $a$ .



wektor gęstości sił objętościowych

$$f_v = \begin{bmatrix} -\rho a \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix}, \quad U = -\rho(ax + gz)$$

równanie statyki

$$\text{grad } p = f_v$$

czyli

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

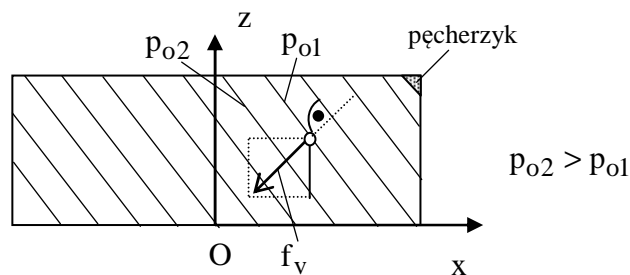
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

wektor  $f_v$  jest stały

funkcja opisująca ciśnienie nie zależy od  $y$  czyli  $p(x, z)$

z równań otrzymujemy

$$p(x, z) = -\rho ax - \rho gz + C$$



a) wyznaczamy składowe wektora  $f_v$



- b) rysujemy linie stałego ciśnienia (izobary)
- c) kierunek  $f_v$  wskazuje kierunek wzrostu ciśnienia
- d) stąd wnioskujemy gdzie znajduje się pęcherzyk powietrza o ciśnieniu  $p_a$
- e) ustalamy współrzędne pęcherzyka  $(x_p, z_p)$

Warunek brzegowy

$$p(x_p, z_p) = p_a$$

wyznaczamy stałą C

$$p(x_p, z_p) = -\rho a x_p - \rho g z_p + C = p_a$$

czyli

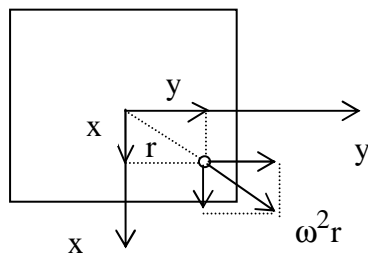
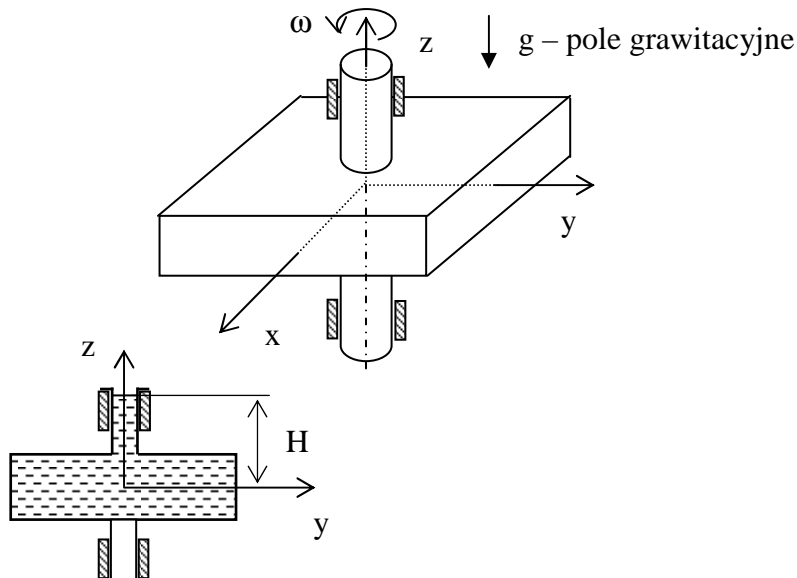
$$C = p_a + \rho a x_p + \rho g z_p$$

ostatecznie funkcja opisująca zmianę ciśnienia ma postać

$$p(x, z) = -\rho a x - \rho g z + (p_a + \rho a x_p + \rho g z_p).$$

Obracający się zbiornik z płynem (stan ustalony)  $\rho = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$

Układ współrzędnych jest związany ze zbiornikiem



$$a_y = -\omega^2 y$$

$$a_x = -\omega^2 x$$

$$f_v = \rho \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ -g \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ -g \end{bmatrix}$$

$$f_m = \begin{bmatrix} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ -g \end{bmatrix}$$

potencjał

$$U_m = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 y^2 - gz$$

$$U = \rho U_m$$

$$\rho = \text{const}$$

zatem ciśnienie opisuje funkcja

$$p = \rho U_m + C$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 y^2 - gz + C_0$$

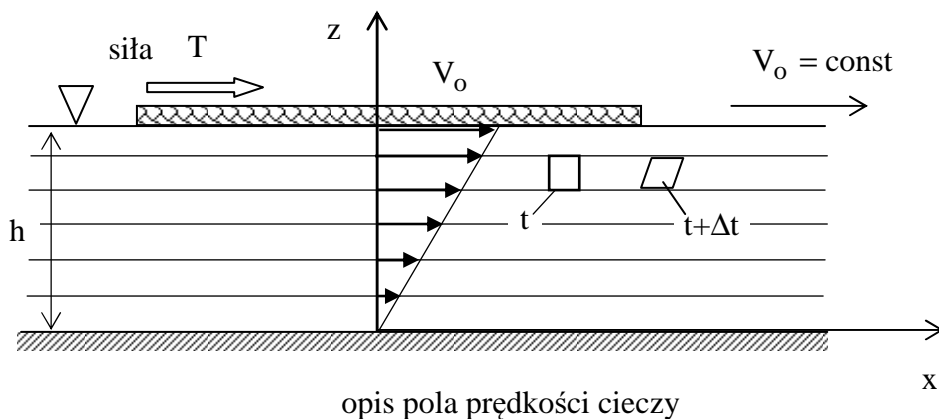
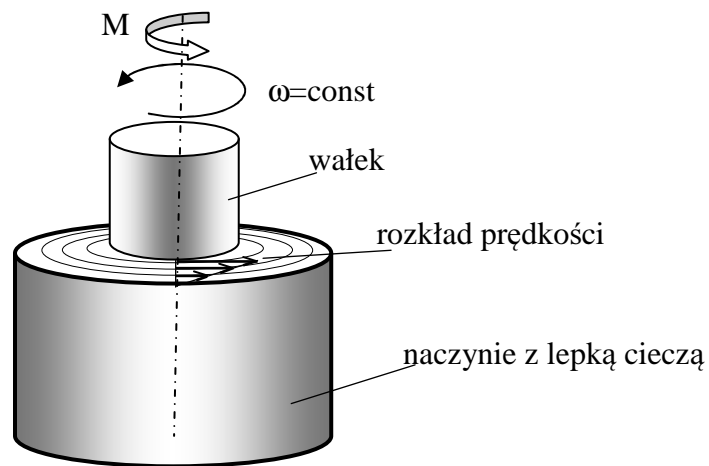
$$p(x, y, z) = \rho \left[ \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 y^2 - gz \right] + C_0$$

$$p(0, 0, H) = p_a$$

stąd

$$C_0 = p_a + \rho g H.$$

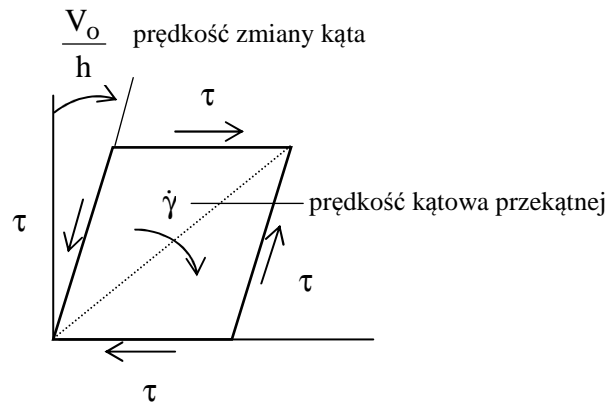
## Lepkość



$$v = \begin{bmatrix} \frac{v_0}{h} z \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad L = \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} 0, & 0, & \frac{v_0}{h} \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{1}{s} \right]$$

tensor prędkości odkształcania

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) = \begin{bmatrix} 0, 0, \dot{\gamma} \\ 0, 0, 0 \\ \dot{\gamma}, 0, 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{v_o}{h}$$



dewiator tensora prędkości odkształcania

$$D_S = D - \frac{1}{3} tr D I = \begin{bmatrix} 0, 0, \dot{\gamma} \\ 0, 0, 0 \\ \dot{\gamma}, 0, 0 \end{bmatrix}$$

Hipoteza Newtona

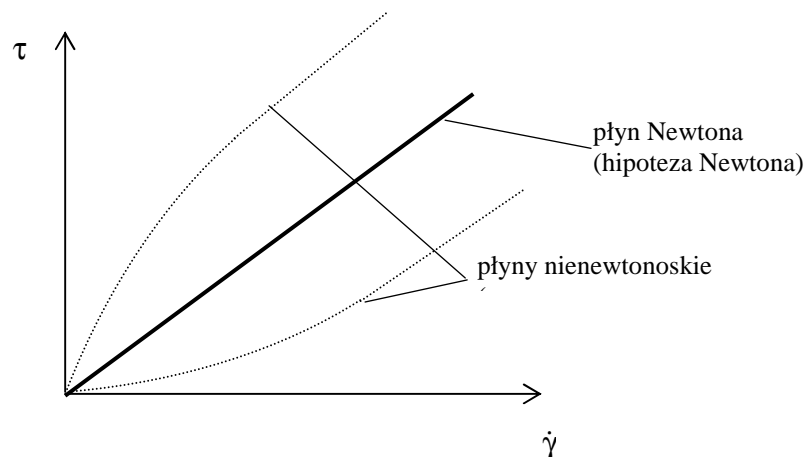
$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

$\mu$  - lepkość dynamiczna

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \text{ - lepkość kinematyczna}$$

$$\nu \left[ \frac{m^2}{s} \right] = 10^4 \text{ St (Stokes)} = 10^6 \text{ cSt (centistokes)}$$

$$\mu \text{ [Pa} \cdot \text{s]} = 10 \text{ P (poise)} = 1000 \text{ cP (centipoise)}$$



przykładowe wartości  $\mu$ :

alkohol etylowy	17° C	1,288 mPa·s ( $10^{-3}$ Pa·s)
gliceryna	20° C	1490 mPa·s
	0° C	12110 mPa·s
woda	20° C	1,000 mPa·s

przykładowe wartości  $\nu$  dla 20° C

woda	1,00	$10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
alkohol etylowy	1,58	$10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
benzyna	0,830	$10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
gliceryna	1200	$10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s

macierzowy zapis hipotezy Newtona

$$\sigma_{\ell} = 2\mu D_S$$

naprężenia związane z lepkością (tarcie wiskotycznym lepkim) są proporcjonalne do dewiatora prędkości odkształcenia

$D_V = \frac{1}{3} tr D I$  - tensor prędkości odkształcenia objętościowego

ale  $tr D \equiv div v$  (z definicji D) czyli

$$D_S = D - \frac{1}{3} div v I$$

$$\sigma_{\ell} = 2\mu \left( D - \frac{1}{3} div v I \right)$$

hipoteza Naviera

$$\sigma_{\ell} = \sigma_{\ell}^{(V)} + \sigma_{\ell}^{(S)} \quad \sigma_{\ell}^{(S)} = 2\mu D_S \quad \sigma_{\ell}^{(V)} = 2\mu' \frac{1}{3} div v I$$

$$\sigma_{\ell} = 2\mu D - \frac{2}{3} (\mu - \mu') div v I$$

Równanie dynamiki płynu

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = f_v + div \sigma$$

dla płynu doskonałego

$\sigma = -pI$  w/g hipotezy Pascala naprężenia wynikają ze wszechstronnego ściskania

$\sigma = -pI + \sigma_{\ell}$   $\sigma_{\ell}$  - naprężenia spowodowane lepkością

w/g hipotezy Newtona

$$\sigma_\ell = 2\mu D_S \quad D_S - \text{dewiator tensora prędkości odkształcania}$$

$$\text{div } \sigma = -\text{grad } p + \text{div } \sigma_\ell$$

$$\text{div } 2\mu D_S = \mu \left( \frac{1}{3} \text{grad } \text{div } v I + \nabla^2 v \right)$$

dla wektora  $v$

$$\nabla^2 v(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

### Równania dynamiki cieczy lepkiej Naviera-Stokesa

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = f_v - \text{grad } p + \mu \left( \frac{1}{3} \text{grad } \text{div } v + \nabla^2 v \right)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } v = 0$$

$$\rho = \varphi(p)$$

dla płynu nieściśliwego  $\rho = \text{const}$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = f_v - \text{grad } p + \mu \nabla^2 v$$

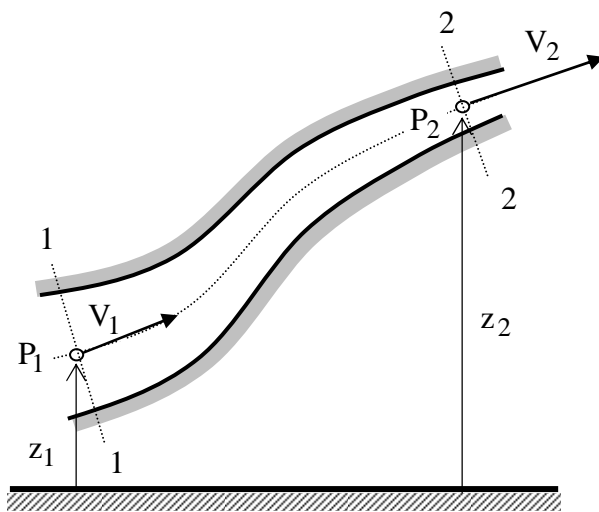
$$\text{div } v = 0$$

przepływ płaski  $(t, x_1, x_2)$

$$\rho \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f_{v_1} \\ f_{v_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

## Równanie Bernoulliego dla płynu lepkiego



$$\gamma = \rho g$$

$$B_i = \frac{1}{2} \rho V_i^2 + p_i + \gamma z_i \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$$

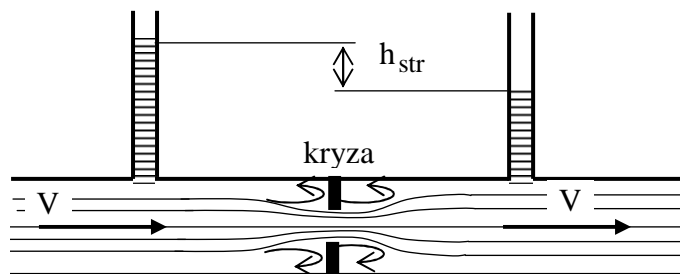
przepływ ustalony, bez wirów, płyn nieściśliwy, potencjał grawitacyjny

dla cieczy lepkiej  $B_1 > B_2$

$$B_1 = B_2 + \Delta B_{12}$$

$\Delta B_{12} > 0$  - ilość energii rozproszonej w czasie przepływu między przekrojami 1-2

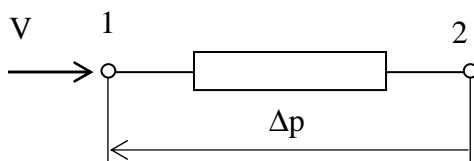
Zwykle wartość ta jest ustalana doświadczalnie



zwykle  $\Delta B_{12}$  określa się jako stratę ciśnienia w postaci  $\Delta B_{12} = \zeta \frac{1}{2} \rho V^2$

ustalamy doświadczalnie  $\zeta$  - bezwymiarowy współczynnik strat (opór przepływu).

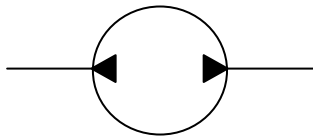
Symboliczne oznaczenie oporów przepływu



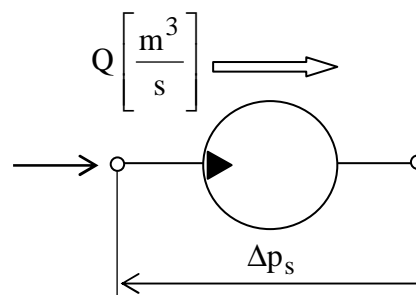
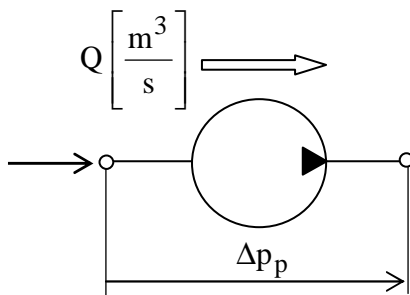
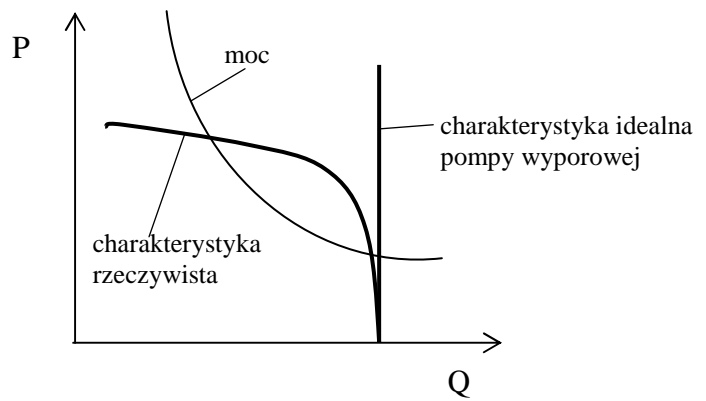
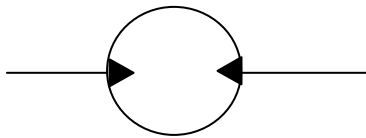
$$\Delta p_{sw} = \zeta \frac{1}{2} \rho V^2$$

gdy w instalacji hydraulicznej znajduje się maszyna hydrauliczna

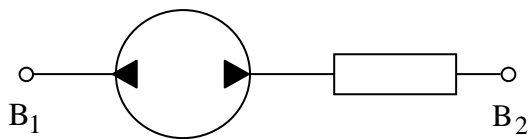
pompa



lub silnik hydrauliczny



Równanie Bernoulliego z oporami przepływu i z pompą



$$B_1 + \Delta p_p = B_2 + \Delta p_{str}$$