Zakład Napędów Wieloźródłowych
Instytut Maszyn Roboczych Ciężkich PW
Laboratorium Elektrotechniki i Elektroniki

Ćwiczenie P3 - instrukcja

Pomiar mocy i energii

Data wykonania ćwiczenia...
Data oddania sprawozdania...

Zespół wykonujący ćwiczenie:

Nazwisko i imię	*ocena końcowa*
1.	....
2.	....
3.	....
4.	…......................
5.	....
6.	....
7.	....
8.	....
9.	....
10.	....

Wydział SiMR PW

Rok ak. 20.../20...

Semestr...............

Grupa.................

Warszawa 2007r.

Spis treści:

1. Cel i zakres ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie różnych metod pomiaru mocy i energii w układach prądu stałego, jednofazowego i trójfazowego.
Zakres ćwiczenia obejmuje metody pomiaru i obliczania mocy i energii w układach prądu stałego, metody pomiaru i obliczanie mocy i energii, w tym mocy i energii czynnej i biernej, w układach prądu przemiennego jedno i trójfazowego.

2. Podstawowe wiadomości teoretyczne

2.1. Praca (energia) prądu elektrycznego

Elementarny ładunek elektryczny +dq, przepływający pod wpływem różnicy potencjałów U z punktu A do punktu B (u = V_A-V_B), przy czym potencjał V_A jest większy od potencjału V_B, wykonuje pracę określoną wzorem:

$$dA = (V_A - V_B)dq = udq \tag{2.1}$$

Uwzględniając zależność pomiędzy ładunkiem elektrycznym, prądem i czasem

$$dq = idt \tag{2.2}$$

otrzymuje się:

$$dA = uidt \tag{2.3}$$

a zatem

$$A = \int_0^t uidt \qquad (2.4).$$

Dla prądu stałego u = U = const oraz i = I =const, więc

$$A = UIt \tag{2.5}$$

Jednostką pracy (energii) elektrycznej jest watosekunda (1Ws) co równoznaczne jest dżulowi (1J). Jest to praca wykonana przez ładunek równy jednemu kulombowi (1C=1As) pod wpływem różnicy potencjałów równej 1V:

$$1J = 1C \cdot 1V = 1V \cdot 1A \cdot 1s \qquad (2.6).$$

2.2. Moc prądu elektrycznego

Praca wykonana w jednostce czasu jest mocą prądu. Dla prądu stałego o natężeniu I:

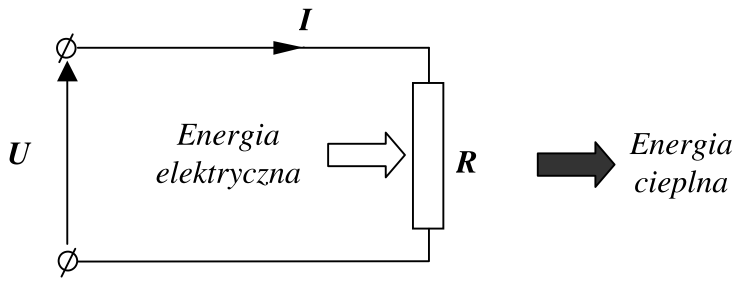
$$P = \frac{A}{t} = \frac{Q}{t} \cdot U = IU \qquad (2.7).$$

Jednostką mocy jest jeden wat (1W):

$$1W = 1V \cdot 1A \qquad (2.8).$$

Przy przepływie prądu przez przewodnik o oporze R następuje zamiana energii elektrycznej na energię cieplną. Moc elektryczną można wyrazić wzorem:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \tag{2.9}$$



Rys. 2.1 Zamiana energii elektrycznej na energię cieplną

Wyrażenie na energię elektryczną, dla prądu stałego, zamienianą na energię cieplną przyjmie postać:

$$A = Pt = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t \qquad (2.10).$$

2.3. Moc i energia prądu przemiennego

Mnożąc wartość chwilową natężenia prądu i wartość chwilową napięcia otrzymuje się wartość chwilową mocy:

$$p = ui \qquad (2.11).$$

Dla odbiornika rezystancyjnego prąd jest w fazie z napięciem, a wartości chwilowe napięcia i prądu wyrażone są wzorami:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin \omega t \\ i &= I_m \sin \omega t \end{aligned} \qquad (2.12)$$

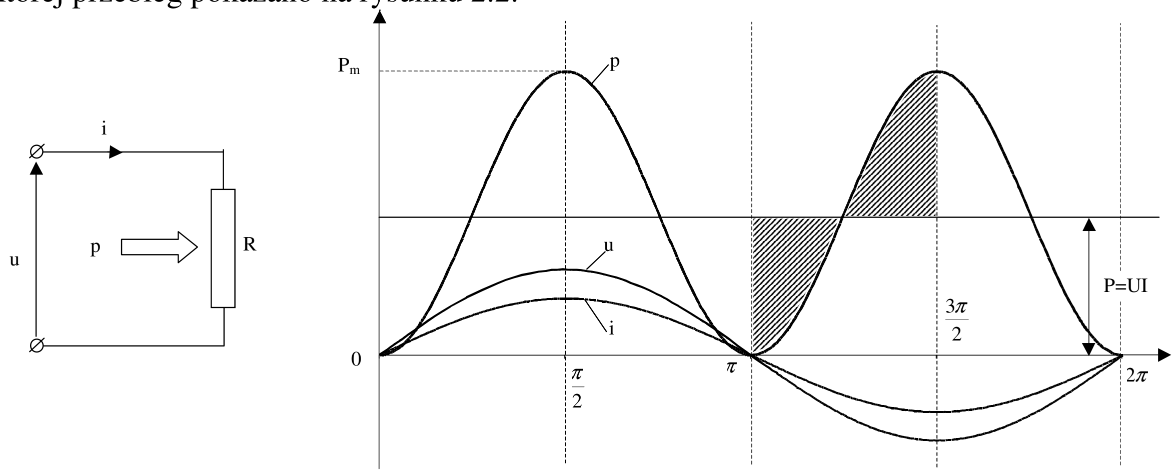
stąd wartość chwilowa mocy wyrażona jest wzorem:

$$p = U_m I_m \sin^2 \omega t \qquad (2.13)$$

gdzie moc maksymalna:

$$P_m = U_m I_m \qquad (2.14).$$

Ze wzoru wynika, że przebieg czasowy wartości chwilowej mocy przedstawia funkcja $\sin^2\omega t$, której przebieg pokazano na rysunku 2.2.



Rys.2.2 Przebiegi u, i, p = f(ωt) w obwodzie z odbiornikiem rezystancyjnym.

Krzywa p = f(ωt) przebiega cały czas nad osią rzędnych, tzn. moc p jest zawsze dodatnia, niezależnie od kierunku prądu, a więc w obu półokresach przepływa od źródła prądu do odbiornika. Energia pobierana przez odbiornik w ciągu jednego okresu wyrażona jest wzorem:

$$A_T = \int_0^T p dt \quad (2.15).$$

Wartość tej energii jest proporcjonalna do pola pod krzywą p=f(ωt). Pole to można zastąpić przez pole równoważnego prostokąta o wysokości P, dla którego:

$$A_T = PT \quad (2.16)$$

gdzie P – wartość średnia mocy pobieranej przez odbiornik w ciągu okresu.
Jak pokazano na rysunku 2.2, moc średnia P jest równa połowie mocy maksymalnej P_m. Wykorzystując to spostrzeżenie i wyrażenie na wartość mocy maksymalnej można napisać:

$$P = \frac{P_m}{2} = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (2.17)$$

a biorąc pod uwagę, że wartość maksymalna prądu lub napięcia o przebiegu sinusoidalnym podzielona przez $\sqrt{2}$ jest równa wartości skutecznej, to:

$$P = UI \quad (2.18)$$

co jest identyczne ze wzorem wyrażającym moc prądu stałego. A zatem w obwodzie prądu przemiennego z odbiornikiem rezystancyjnym iloczyn wartości skutecznej prądu i wartości skutecznej napięcia równy jest mocy średniej.
Wartość mocy prądu przemiennego pomnożona przez czas jest wartością energią elektryczną przenoszoną w tym czasie przez prąd.
Dla obciążenia rezystancyjnego wartość mocy i energii nazywana jest mocą czynną i energią czynną.

2.4. Pojęcie mocy i energii biernej

W obwodach prądu przemiennego obciążonych elementami pasywnymi zachowawczymi tzn. indukcyjnością (cewka) lub pojemnością (kondensator) występuje zjawisko mocy i energii biernej.
Wartość chwilowa mocy w obwodzie z indukcyjnością wyraża się wzorem:

$$p = ui \quad (2.19).$$

Jeżeli prąd zmienia się w sposób sinusoidalny tzn.

$$i = I_m \sin \omega t \quad (2.20)$$

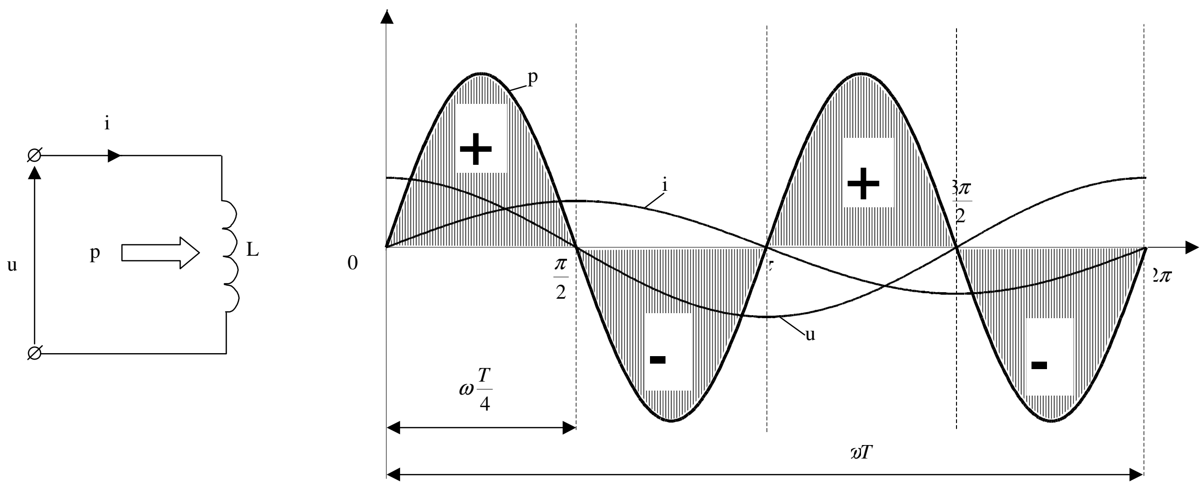
to napięcie wyprzedza prąd o kąt $\frac{\pi}{2}$, a zatem:

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.21).$$

Stąd moc prądu określona jest wzorem:

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = UI \sin 2\omega t \quad (2.22).$$

A więc przebieg czasowy mocy chwilowej w obwodzie z indukcyjnością jest przebiegiem sinusoidalnym o podwójnej częstotliwości w stosunku do częstotliwości prądu i napięcia. Zależność tą pokazano na rysunku 2.3.



Rys. 2.3 Przebiegi u, i, p = f(ωt) w obwodzie z indukcyjnością

W pierwszej ćwiartce okresu moc p ma wartość dodatnią, a więc przepływa od źródła prądu do odbiornika indukcyjnego. W drugiej ćwiartce okresu wartość mocy chwilowej jest ujemna, tzn. kierunek przepływu mocy jest odwrotny – od odbiornika indukcyjnego do źródła prądu. W następnych dwóch ćwiartkach przebieg się powtarza. Zakreskowane pole, objęte krzywą p = f(ωt), jest proporcjonalne do energii elektrycznej:

$$A_T = \int_0^T p\,dt \qquad (2.23).$$

Ponieważ, jak widać na rysunku 2.3, pola dodatnie są równe polom ujemnym, więc energia pobrana w ciągu całego okresu przez odbiornik indukcyjny równa się zeru $A_T = 0$.
Wynika stąd, że moc średnia P, pobierana w ciągu okresu równa się zeru:

$$P = \frac{A_T}{T} = 0 \qquad (2.24).$$

Energia elektryczna pobierana lub oddawana przez odbiornik indukcyjny w poszczególnych ćwiartkach okresu równa się energii pola magnetycznego. Np. w pierwszej ćwiartce prąd narasta od zera do wartości I_m. Strumień wytwarzany przez cewkę narasta od zera do wartości Φ_m. Na wytworzenie tego strumienia pobierana jest ze źródła prądu energia:

$$A_{\frac{T}{4}} = \int_0^{\frac{T}{4}} uidt = \int_0^{\frac{T}{4}} L\frac{di}{dt}idt = \int_0^{I_m} Lidi = \frac{LI_m^2}{2} = W_m \qquad (2.25).$$

W drugiej ćwiartce okresu prąd i maleje od wartości maksymalnej I_m do zera, SEM samoindukcji zmienia kierunek i energia równa wartości W_m jest oddawana do źródła prądu, gdyż pole magnetyczne cewki zanika do zera. W następnych dwóch ćwiartkach to zjawisko powtarza się.
W odbiorniku charakteryzującym się samą tylko indukcyjnością L (bez rezystancji R) zachodzi więc okresowa wymiana energii między odbiornikiem a źródłem zasilania, bez jednokierunkowego przepływu energii połączonego z nieodwracalną przemianą energii elektrycznej w inną postać energii, np. cieplną, jak w odbiorniku rezystancyjnym.
Wskutek tego energia elektryczna pobierana przez odbiornik indukcyjny w ciągu danego czasu, składającego się z pewnej liczby okresów, wyrażona w dżulach (J), równa się zeru, oraz moc elektryczna, równa energii pobieranej w ciągu jednostki czasu, wyrażona w watach, również równa się zeru. Jednakże wskutek okresowej wymiany energii przez odbiornik indukcyjny płynie prąd o wartości skutecznej I, a na jego zaciskach występuje napięcie o

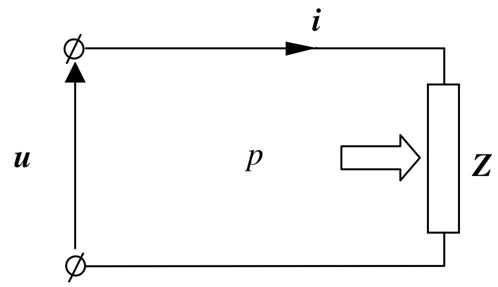
wartości skutecznej U. Iloczyn tych dwóch wartości UI, w przypadku gdy kąt między wektorami U i I wynosi $\frac{\pi}{2}$ nosi nazwę mocy biernej, która oznaczana jest literą Q.
Jednostką mocy biernej jest war (1 VAr)
Iloczyn mocy biernej i czasu nosi nazwę energii biernej:

$$A_b = Qt \tag{2.26}$$

Jednostką energii biernej jest warosekunda (1 VArs).
Energii biernej nie wolno wyrażać w dżulach (lub kWh), gdyż nie jest ona równoważna energii zamienianej w sposób nieodwracalny na inną postać energii.

2.5. Moc i energia prądu przemiennego dla obciążenia impedancyjnego

W praktyce żadnego z odbiorników elektrycznych nie można scharakteryzować tylko jednym parametrem tzn. samą indukcyjnością, pojemnością czy rezystancją. Natomiast każdy z odbiorników w obwodach prądu przemiennego można opisać impedancją Z.
Na rysunku 2.4 przedstawiono obwód prądu przemiennego obciążony impedancją Z.



Rys. 2.4. Obwód prądu przemiennego obciążony impedancją Z

Jeżeli prąd i napięcie zapiszemy jako:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \end{aligned} \tag{2.27}$$

to wartość mocy chwilowej równa jest iloczynowi napięcia i prądu:

$$p = ui \tag{2.28}$$

Podstawiając do wzoru wyrażenia na wartość prądu i napięcia otrzymujemy:

$$p = U_m \sin(\omega t + \psi_u) I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\psi_u - \psi_i) - \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

a zatem:

$$p = UI \cos\varphi - UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \tag{2.29}$$

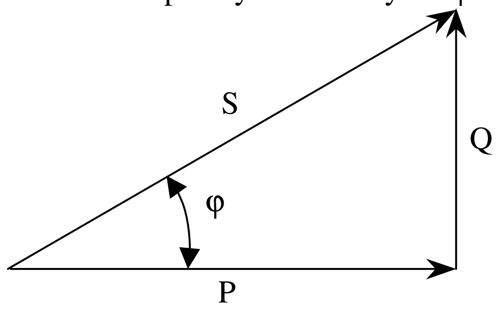
Człon pierwszy tego wyrażenia przedstawia wartość średnią przebiegu i określa moc czynną, drugi człon zaś określa moc bierną.
W praktyce moc elektryczną wyraża się w postaci symbolicznej jako iloczyn napięcia $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$ i prądu w postaci sprzężonej $\underline{I}^* = Ie^{-j\psi_i}$.
Wartość mocy wyznaczona poprzez pomnożenie tak określonych wartości napięcia i prądu:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}\,\underline{I}^* = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} \\ \underline{S} &= UIe^{j\varphi} \\ \underline{S} &= UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.30}$$

Jak widać człon pierwszy tego wyrażenia reprezentuje moc czynną P, zaś człon drugi moc bierną Q.
Moduł tego wyrażenia nazywamy mocą pozorną:

$$S = UI \tag{2.31}$$

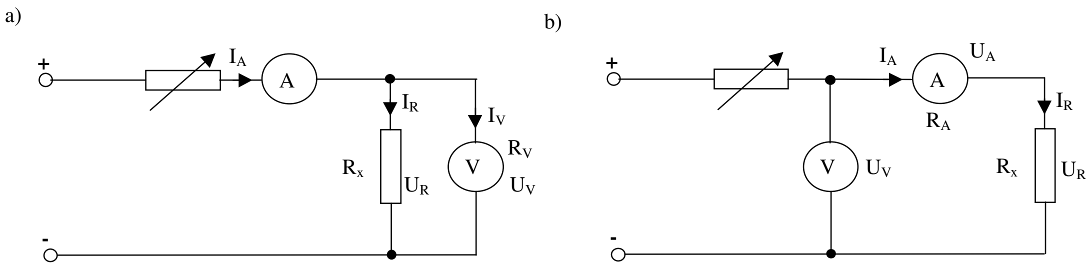
Moc pozorna, czynna i bierna tworzą trójkąt nazywany trójkątem mocy, który pokazano na rysunku 2.5. Kąt φ jest kątem przesunięcia fazowego między napięciem i prądem, a jednocześnie pozwala na określenie współczynnika mocy cosφ.



Rys. 2.5. Trójkąt mocy

2.6. Metody pomiaru mocy i energii prądu stałego

Moc prądu stałego może być mierzona tak zwaną metodą techniczną, to znaczy przy zastosowaniu woltomierza i amperomierza połączonych według jednego ze schematów przedstawionych na rysunku 2.6.



Rys. 2.6. Schematy połączeń do pomiaru mocy prądu stałego metodą techniczną.

W obydwu układach moc pobierana przez odbiornik o rezystancji R jest równa:

$$P = UI \tag{2.32}$$

W układzie pokazanym na rysunku 2.6a woltomierz V mierzy napięcie na zaciskach odbiornika, zaś amperomierz A – sumę prądów przepływających przez odbiornik R i woltomierz V. Oznaczając wskazania woltomierza i amperomierza odpowiednio przez U_V i I_A, a rezystancję woltomierza R_V, można napisać że:

$$U_V = U_R$$

$$I_A = I_R + I_V = I_R + \frac{U_V}{R_V} \tag{2.33}$$

$$P = U_R I_R = U_V\left(I_A - \frac{U_V}{R_V}\right) = U_V I_A - \frac{U_V^2}{R_V} = U_V I_A + p'$$

przy czym p' jest poprawką uwzględniającą wpływ mocy rezystancji woltomierza R_V na wartość mocy odbiornika R_x.

Im większy jest iloraz rezystancji odbiornika R_x i rezystancji woltomierza R_V, tym wartość poprawki jest większa. Dokładność pomiaru tą metodą będzie większa gdy wartość rezystancji woltomierza R_V będzie dużo większa od wartości rezystancji dla której wyznaczamy moc.

W układzie pokazanym na rysunku 2.6b woltomierz V mierzy sumę spadków napięć na odbiorniku R_x i na rezystancji amperomierza R_A, zaś amperomierz A – prąd płynący przez odbiornik R_x, a zatem możemy napisać:

$$U_V = U_R + U_A = U_R + R_A I_A$$
$$I_A = I_R \qquad (2.34)$$
$$P = U_R I_R = (U_V - R_A I_A) I_A = U_V I_A - R_A I_A^2 = U_V I_A - p''$$

przy czym p” jest poprawką uwzględniającą wpływ mocy rezystancji amperomierza R_A na wartość mocy odbiornika R_x.
Im mniejszy jest iloraz rezystancji amperomierza R_A i rezystancji odbiornika R_x tym wartość poprawki jest mniejsza. Dokładność pomiaru tą metodą będzie większa gdy wartość rezystancji amperomierza R_A będzie dużo mniejsza od wartości rezystancji odbiornika R_x.
Mnożąc wartość tak wyznaczonej mocy przez czas w którym płyną przez odbiornik prąd otrzymujemy wartość energii elektrycznej prądu stałego pobranej przez odbiornik.

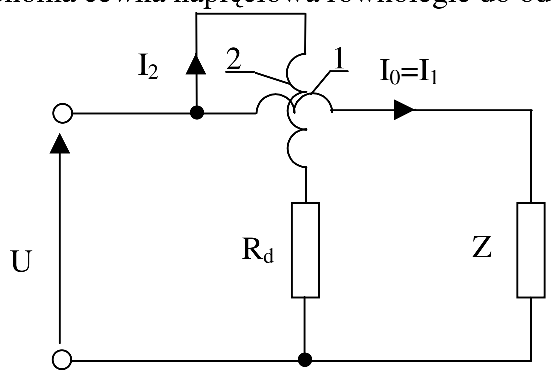
$$A_{st} = Pt \qquad (2.35)$$

2.7. Metody pomiaru mocy i energii prądu przemiennego

Moc prądu przemiennego opisana jest następującymi wzorami:

moc czynna P=UI cosφ
moc bierna Q=UI sinφ (2.36).
moc pozorna S=UI

Do pomiaru mocy czynnej prądu przemiennego stosuje się watomierze. W watomierzu elektrodynamicznym nieruchoma cewka prądowa połączona jest szeregowo z odbiornikiem energii elektrycznej, a ruchoma cewka napięciowa równolegle do odbiornika.



Rys. 2.7 Układ watomierza elektrodynamicznego; 1- cewka prądowa, 2- cewka napięciowa, Z- impedancja, R_d – rezystancja dodatkowa

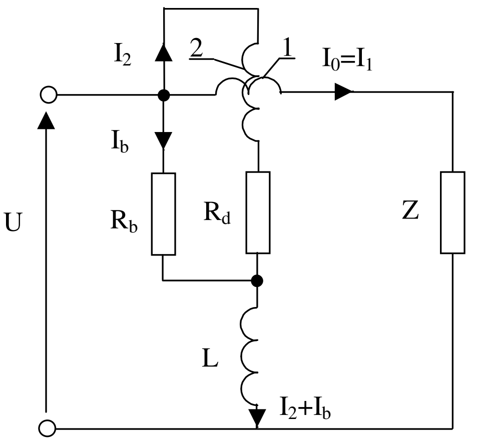
Prąd przepływający przez cewką prądową jest równy prądowi odbiornika, tj. $I_1 = I_0$. Prąd przepływający przez cewkę napięciową jest proporcjonalny do napięcia na odbiorniku, tj. $I_2 = c_2U$. Ze względu na dużą rezystancję opornika dodatkowego R_d, prąd I_2 jest w fazie z napięciem U. Między prądami płynącymi w cewkach występuje takie samo przesunięcie fazowe, jak między prądem odbiornika I_0 a napięciem na odbiorniku U.
Odchylenie organu ruchomego jest proporcjonalne do iloczynu wartości chwilowych napięcia u i prądu i to znaczy mocy czynnej P.
Podziałka watomierza jest zawsze niemianowana. W celu otrzymania wartości mierzonej mocy należy liczbę działek, o jaką wychyliła się wskazówka, pomnożyć przez stałą watomierza.
Stałą watomierza wyznacza się ze wzoru:

$$c_w = \frac{U_n I_n}{n_{max}} \qquad (2.37)$$

w którym: U_n; I_n – wartości zakresowe cewki napięciowej i cewki prądowej; n_{max} – liczba działek podziałki watomierza.

Zmiany zakresu pomiarowego watomierza dokonuje się przez zmianę zakresu cewki prądowej i cewki napięciowej. Zmiana zakresu cewki prądowej odbywa się przez szeregowe lub równolegle łączenie połówek cewki prądowej. Zmianę zakresu cewki napięciowej uzyskuje się przez zmianę rezystancji opornika dodatkowego.

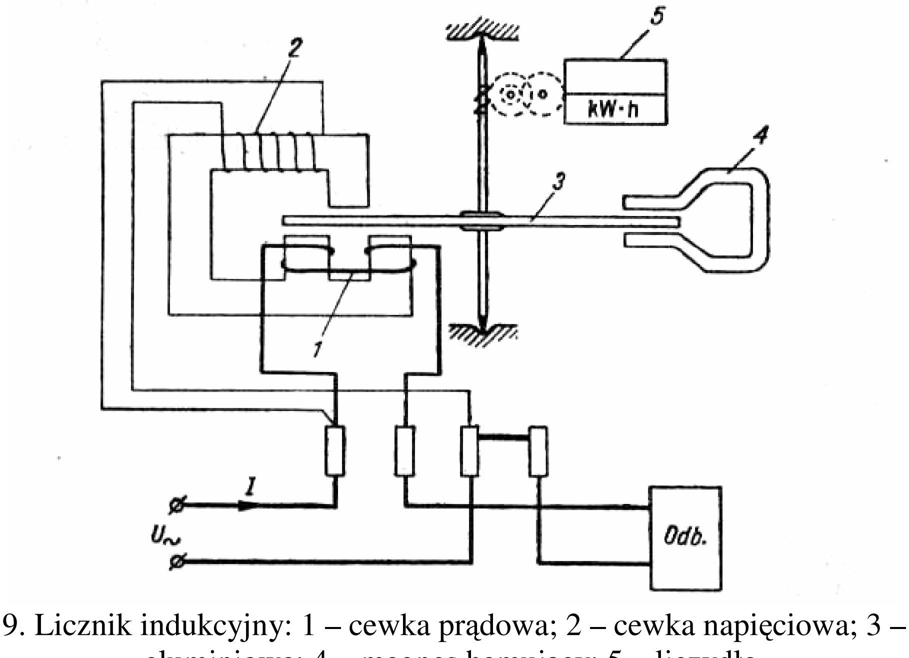
Do pomiaru mocy biernej wykorzystuje się waromierze. Miernik mocy biernej różni od watomierza jedynie obwodem napięciowym. Włączenie w obwód napięciowy cewki o indukcyjności L powoduje opóźnienie o kąt $\frac{\pi}{2}$ prądu cewki napięciowej względem doprowadzonego napięcia. Układ waromierza elektrodynamicznego przedstawiono na rysunku 2.8.



Rys. 2.8 Układ waromierza elektrodynamicznego.

Pomiaru mocy pozornej w obwodach prądu przemiennego dokonuje się pośrednio poprzez pomiar napięcia i prądu odpowiednio woltomierzem i amperomierzem. Iloczyn wskazań tych dwóch mierników jest wartością mocy pozornej.

Do pomiaru energii elektrycznej prądu przemiennego wykorzystuje się liczniki energii elektrycznej, którymi są najczęściej mierniki indukcyjne. W miernikach indukcyjnych wykorzystuje się oddziaływanie strumienia magnetycznego, wytworzonego przez prąd płynący w cewce elektromagnesu, na prądu wirowe indukowane w metalowej tarczy. Zasadę budowy licznika energii elektrycznej przedstawiono na rysunku 2.9.



Rys. 2.9. Licznik indukcyjny: 1 – cewka prądowa; 2 – cewka napięciowa; 3 – tarcza aluminiowa; 4 – magnes hamujący; 5 – liczydło

Głównymi zespołami licznika są elektromagnes napięciowy, elektromagnes prądowy, tarcza aluminiowa, magnes trwały i liczydło. Cewka elektromagnesu napięciowego ma dużą liczbę zwojów cienkiego drutu miedzianego. Cewka prądowa jest uzwojona grubym drutem, o małej liczbie zwojów. Tarcza aluminiowa jest osadzona na ułożyskowanej osi, połączonej przekładnią zębatą z liczydłem bębnowym.
Pod wpływem sinusoidalnego napięcia i prądu doprowadzonych do odpowiednich cewek licznika powstają przemienne strumienie magnetyczne przenikające tarczę. Strumienie te indukują w tarczy prądy wirowe. Współdziałanie powstałych prądów wirowych ze strumieniami magnetycznymi powoduje powstanie momentu napędowego:

$$M_n = k_w \omega \Phi_u \Phi_i \sin\psi \qquad (2.38)$$

gdzie:
k_w – stała konstrukcyjna; ω – pulsacja strumieni, ψ – kąt fazowy między strumieniami.
Zależność strumieni od napięcia i prądu w cewkach jest praktycznie liniowa. Można więc zapisać że: $\Phi_i = k_i I$ oraz $\Phi_u = k_u I_u = k_u \frac{U}{Z_u}$ przy czym $Z_u = R_u + j\omega L_u$ - impedancja obwodu napięciowego. Cewka napięciowa ma dużą indukcyjność, więc z dostatecznie dużą dokładnością można napisać: $\Phi_u = k_u \frac{U}{X_L}$.
Podstawiając do wzoru na moment napędowy zależności opisujące strumienie otrzymuje się

$$M_n = kUI \sin\psi \qquad (2.39).$$

Aby moment napędowy był proporcjonalny do mocy czynnej przepływającej przez licznik musi być spełniona zależność $\sin\psi = \cos\varphi$ czyli $\psi = 90^o - \varphi$ w której j – jest kątem fazowym pomiędzy napięciem i prądem obciążenia.
Strumień prądowy wywołany prądem I odbiornika, jest w fazie z tym prądem, a strumień napięciowy, wytwarzany przez cewkę napięciową (o dużej indukcyjności), opóźnia się względem napięcia o kąt prosty. Powstaje więc związek $\sin\psi = \sin(90^o - \varphi) = \cos\varphi$ decydujący o proporcjonalności momentu napędowego ustroju indukcyjnego do mocy czynnej prądu P:

$$M_n = kUI\cos\varphi = kP \qquad (2.40).$$

Moment napędowy równoważony jest przez momentem hamującym, który powstaje w obracającej się tarczy aluminiowej na skutek przecinania jej przez strumień magnetyczny magnesu trwałego. W tarczy indukują się prądy wirowe proporcjonalne do strumienia i prędkości obrotowej tarczy. Wzajemne oddziaływanie strumieni powoduje wytworzenie momentu obrotowego skierowanego przeciwnie do kierunku obrotu tarczy.
Ponieważ zachodzi równość momentu napędowego i momentu hamującego $M_n = M_h$ tarcza obraca się ruchem jednostajnym.
Można zatem powiedzieć, że licznik energii elektrycznej jest watomierzem (cewki prądowa i napięciowa) wyposażonym w mechanizm całkujący (obrotowa tarcza).
Ponieważ moment napędowy licznika ogólnie można wyrazić wzorem:

$$M_n(t) = c_1 P(t) \qquad (2.41)$$

zaś moment hamujący:

$$M_h(t) = c_2 V(t) \qquad (2.42)$$

i $M_n = M_h$ wówczas

$$c_1 P = c_2 2\pi r \frac{dN}{dt} \qquad (2.43)$$

gdzie :

r – odległość od osi tarczy do środka strumienia między magnesami
$l = 2\pi rN$ - droga przebyta po N obrotach przez punkt tarczy oddalony o r od osi.
Po przekształceniach otrzymujemy:

$$Pdt = \frac{c_2}{c_1} 2\pi rdN = cdN \qquad (2.44),$$

a po scałkowaniu :

$$\int_{t_1}^{t_2} Pdt = c \int_{N_1}^{N_2} dn \qquad (2.45)$$

Wynika stąd, że miarą energii może być liczba obrotów tarczy z uwzględnieniem stałej konstrukcyjnej c. W praktyce na tabliczce znamionowej licznika podawana jest inna stała licznika, będąca odwrotnością stałej c

$$K = \frac{1}{c} = \frac{N}{A} \qquad (2.46),$$

która wyraża liczbę obrotów tarczy licznika odpowiadającą jednostce energii elektrycznej.
Pomiaru energii biernej dokonuje się przy pomocy liczników energii biernej. Zasada pomiaru jest taka sama jak licznikiem energii czynnej. Różnica polega na tym, że moment napędowy licznika powinien być proporcjonalny do mocy biernej Q ponieważ energia bierna określona jest zależnością:

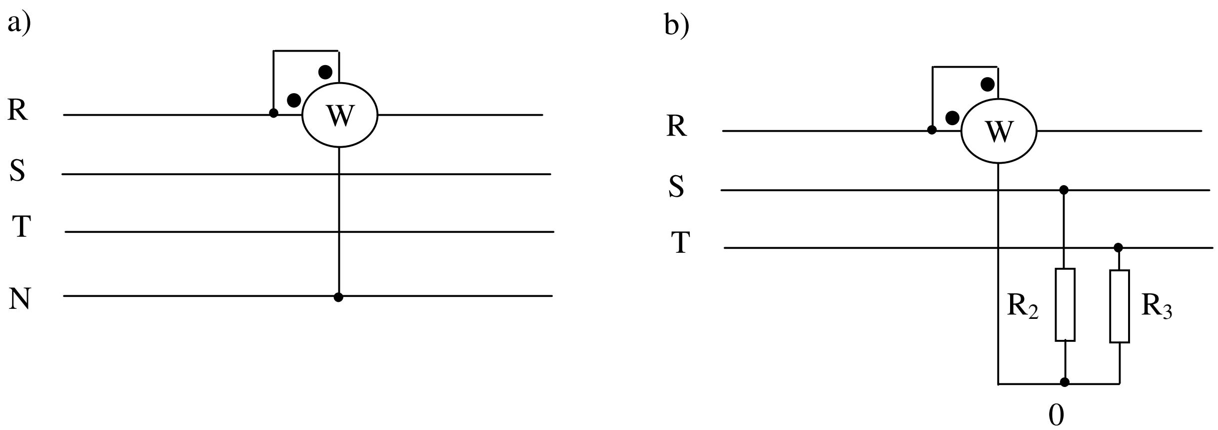
$$A_b = \int_{t_1}^{t_2} UI \sin\varphi dt = \int_{t_1}^{t_2} Qdt \qquad (2.47)$$

przy czym φ – kąt przesunięcia fazowego między prądem i napięciem odbiornika.
Uzyskuje się to przesuwając dodatkowo wektor napięcia U o kąt 90°. Wtedy otrzymujemy:

$$UI \cos(90^o - \varphi) = UI \sin\varphi = Q \qquad (2.48).$$

2.8. Metody pomiaru mocy i energii prądu trójfazowego.

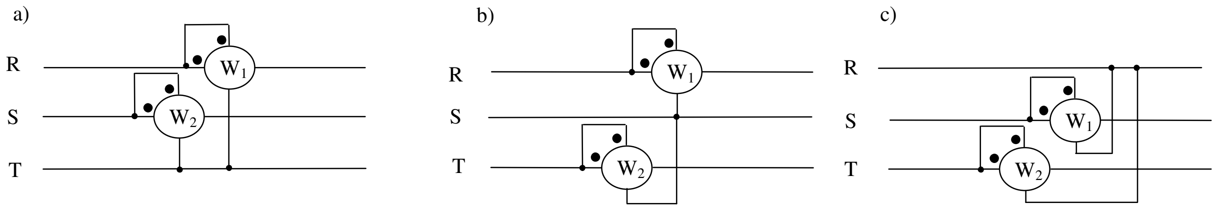
Do pomiaru mocy w sieciach prądu trójfazowego wykorzystuje się watomierze i watomierze. W zależności od obciążenia sieci (symetryczne lub niesymetryczne) i rodzaju sieci (trój- lub czteroprzewodowe) stosuje się różne podłączenia mierników. Dla sieci obciążonych symetrycznie wystarczające jest wykorzystanie tylko jednego miernika. Schematy włączenia miernika w takim przypadku przedstawiono na rysunku 2.10.



Rys. 2.10. Schemat pomiaru mocy sieci trójfazowej obciążonej symetrycznie: a) czteroprzewodowej; b) trójprzewodowej

W sieci czteroprzewodowej obciążonej symetrycznie, gdy moc wszystkich faz jest jednakowa, wystarczy mierzyć moc jednej fazy, zaś moc całkowita równa jest $P = 3P_1$.

W sieciach bez przewodu zerowego (trójprzewodowych), obciążonych symetrycznie, moc mierzy się jednym watomierzem w układzie ze sztucznym punktem zerowym. Obwód napięciowy watomierza o rezystancji R_1 wraz z rezystancjami R_2 i R_3 równymi R_1 stanowi symetryczną gwiazdę, dzięki czemu watomierz włączony jest na napięcia i prąd fazowy.
W sieciach obciążonych niesymetrycznie moc można mierzyć trzema watomierzami. W przypadku sieci czteroprzewodowej watomierze włączone są po jednym na każdą fazę. W sieciach trójprzewodowych obwody napięciowe mierników połączone są w gwiazdę. Moc całkowita równa jest sumie wskazań wszystkich mierników.
W praktyce, w sieciach trójprzewodowych, stosuje się wygodniejszy układ dwóch watomierzy, zwany inaczej układem Arona. Schematy połączeń mierników w układzie Arona przedstawiono na rysunku 2.11.



Rys. 2.11. Układy połączeń do pomiaru mocy metodą Arona.

Cewki prądowe tych watomierzy są włączone na dwie dowolne fazy. Początki cewek napięciowych są połączone z początkami odpowiednich cewek prądowych, końce cewek napięciowych są przyłączone do trzeciego przewodu (na cewkach napięciowych występuje napięcie międzyprzewodowe). Moc całkowita jest sumą wskazań obu watomierzy.
W układzie sieci trójprzewodowej suma wartości chwilowych prądów fazowych jest równa zeru:

$$i_R + i_S + i_T = 0 \qquad (2.49)$$

stąd dla przypadku przedstawionego na rysunku 2.11 b:

$$i_S = -(i_R + i_T) \qquad (2.50).$$

Podstawiając tę zależność do ogólnego wzoru na moc w układzie trójfazowym otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p &= u_R i_R + u_S i_S + u_T i_T = u_R i_R - u_S(i_R + i_T) + u_T i_T = \\ &= (u_R - u_S) i_R + (u_T - u_S) i_T = u_{RS} i_R + u_{TS} i_T \end{aligned} \qquad (2.51)$$

Iloczyn wartości chwilowych prądów i napięć stanowi moc chwilową prądu przemiennego. A zatem możemy napisać, że:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_{RS} i_R \\ p_2 &= u_{TS} i_T \end{aligned} \qquad (2.52)$$

Wartości chwilowe prądów i napięć można opisać równaniami ogólnymi mającymi postać:

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) \end{aligned} \qquad (2.53)$$

gdzie:
I_m, U_m – wartości maksymalne prądu i napięcia;
ψ_i, ψ_u –kąt przesunięcia fazowego przebiegów prądu i napięcia.
Wyrażenie opisujące moc chwilową prądu przemiennego przyjmie postać:

$$p = ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u)\sin(\omega t + \psi_i) \qquad (2.54)$$

Zastępując iloczyn sinusów kątów połową kosinusów różnicy i sumy kątów otrzymujemy:

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\psi_u - \psi_i) - \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \qquad (2.55)$$

Przyjmując, że:
$\psi_u - \psi_i = \varphi$ – kąt przesunięcia fazowego pomiędzy przebiegami napięcia i prądu;
$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U; \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I$ - wartości skuteczne napięcia i prądu,
wyrażenie określające moc chwilową prądu przemiennego przyjmie postać:

$$p = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + 2\psi_i + \varphi) \qquad (2.56)$$

Energia pobrana w ciągu okresu T wynosi:

$$A_T = \int_0^T p\,dt \qquad (2.57)$$

Podstawiając wyrażenie opisujące moc chwilową prądu przemiennego (2.56) otrzymujemy:

$$A_T = \int_0^T UI\cos\varphi\,dt - \int_0^T UI\cos(2\omega t + 2\psi_i + \varphi)dt \qquad (2.58)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$A_T = \left[UI\cos\varphi t - \frac{UI}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\psi_i + \varphi)\right]_0^T \qquad (2.59)$$

czyli

$$A_T = UI\cos\varphi T \qquad (2.60)$$

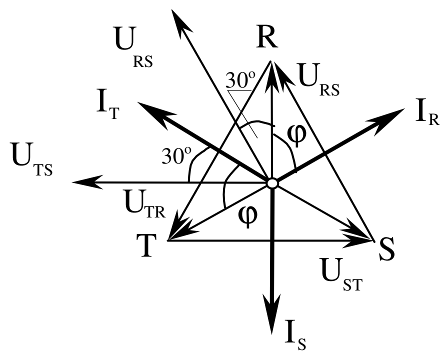
Moc średnia (moc czynna) prądu sinusoidalnie zmiennego wynosi:

$$P = \frac{1}{T}A_T = UI\cos\varphi \qquad (2.61)$$

Stosując to uogólnienie do rozważnego przypadku otrzymamy wyrażenie opisujące moc czynną wskazywaną przez watomierze:

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{RS} I_R \cos\varphi_1 \\ P_2 &= U_{TS} I_T \cos\varphi_2 \end{aligned} \qquad (2.62)$$

gdzie:
U_{RS}, U_{TS} – wartości skuteczne napięć międzyfazowych;
I_R, I_T – wartości skuteczne prądów fazowych;
φ_1, φ_2 – kąty przesunięcia fazowego pomiędzy odpowiednimi prądami fazowymi i napięciami międzyfazowymi.
Dla układu symetrycznie obciążonego zachodzi równość napięć międzyfazowych i prądów fazowych. Możemy zatem zapisać, że
$U_{RS}=U_{TS}=U$ oraz $I_R=I_T=I$.
Odpowiednie kąty przesunięcia fazowego wynoszą (rys. 2.12)
$\varphi_1 = \varphi + 30^o$
$\varphi_2 = \varphi - 30^o$



Rys. 2.12. Wykres wektorowy układu obciążonego symetrycznie

Po podstawieniu do równania (2.62) otrzymujemy:

$$P_1 = UI\cos(\varphi + 30^o)$$
$$P_2 = UI\cos(\varphi - 30^o) \qquad (2.63)$$

A zatem suma mocy czynnych mierzonych przez poszczególne watomierze wynosi:

$$P_1 + P_2 = UI2\cos\frac{2\varphi}{2}\cos\frac{60^o}{2} = \sqrt{3}UI\cos\varphi \qquad (2.64)$$

Podstawiając do otrzymanego wzoru zależność pomiędzy napięciem fazowym U_f ,gdzie f – faza R, S lub T i międzyfazowym U tj. $U = \sqrt{3}U_f$ równanie (2.64) przyjmie postać:

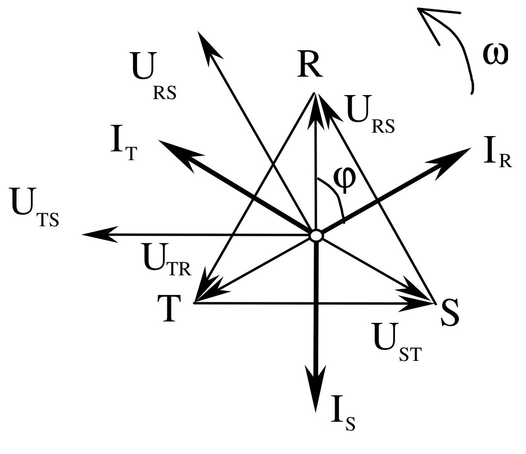
$$P_1 + P_2 = 3U_f I\cos\varphi \qquad (2.65)$$

co jest równoważne równaniu opisującemu moc całkowitą prądu przemiennego trójfazowego obciążonego symetrycznie.

Można więc napisać, że suma $P_1 + P_2$ jest całkowitą mocą układu trójfazowego.

Pomiar mocy metodą Arona może być stosowany zarówno dla sieci obciążonych symetrycznie jak i niesymetrycznie.

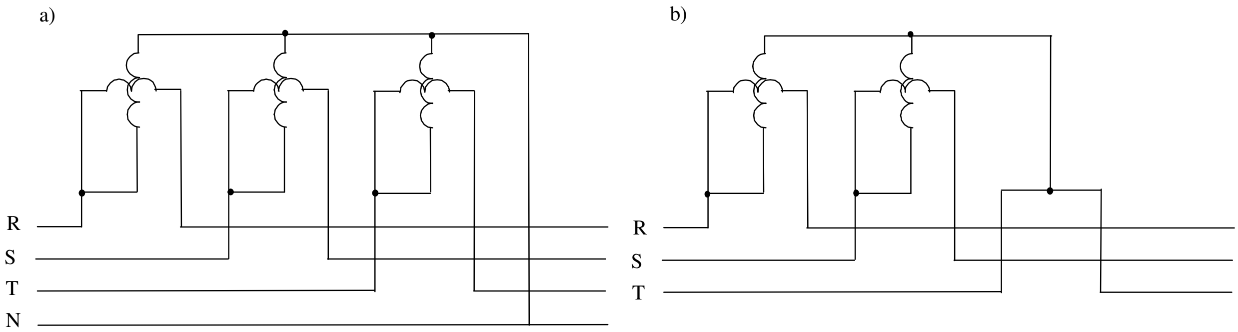
W przypadku gdy odbiornik charakteryzuje się tylko oporem rzeczywistym, tzn. kąt przesunięcia fazowego φ równy jest 0, wskazania obu watomierzy są jednakowe. Natomiast gdy $\varphi \neq 0$ wskazania obu watomierzy są niejednakowe. Szczególnym przypadkiem jest $\varphi = 60^o$. Dla tego kąta jeden z watomierzy wskazuje moc równą 0. Dla obciążenia charakteryzującego się większym kątem przesunięcia fazowego (tzn. $\varphi > 60^o$) jeden z watomierzy wskazuje „moc ujemną”. Znak „-” jednego watomierza należy uwzględnić przy sumowaniu wartości wskazywanych mocy przez watomierze.



Rys.2.13. Wykres wektorowy dla watomierzy połączonych w układ Arona według rysunku 2.11 b, w przypadku gdy watomierz W_1 wskazuje wartość 0.

Do pomiaru energii trójfazowej stosuje się liczniki indukcyjne trójfazowe o dwóch lub trzech organach napędowych. W sieciach trójfazowych czteroprzewodowych stosuje się liczniki trójustrojowe, a w sieciach trójprzewodowych obciążonych niesymetrycznie liczniki dwuustrojowe. Na rysunku 2.13 przedstawiono schematy liczników trójfazowych.

Licznik trójfazowy składa się z trzech lub dwóch organów napędowych takich jak w liczniku jednofazowym, których momenty napędowe działają na dwie tarcze aluminiowe umocowane na wspólnej osi. Górną tarczę obejmują dwa ustroje indukcyjne, a dolną tarczę – jeden ustrój oraz magnesy trwałe wytwarzające moment hamujący. Momenty napędowe od mocy poszczególnych faz sumują się, a jedno liczydło wskazuje łączną energię trzech faz.



Rys. 2.13. Schematy włączania liczników trójfazowych do sieci cztero- i trójprzewodowej

3. Literatura pomocnicza

1. Cholewicki T. „Elektrotechnika teoretyczna”
2. Kukurba H. Śliwa A. „Zbiór zadań z elektrotechniki”
3. Michałowski K., Przyjałkowski A. „Elektrotechnika z elektroniką”
4. Ocioszyński J., Majewski P. „Zbiór zadań z elektrotechniki”
5. Przeździecki F. „Elektrotechnika i elektronika”
6. Szumanowski A. wykład z „Elektrotechniki i elektroniki”
7. praca zbiorowa „Elektrotechnika i elektronika dla nieelektryków”

Opracował: dr inż. Arkadiusz Hajduga