

**Materialy pomocnicze do ćwiczeń laboratoryjnych
i prac semestralnych
z zakresu przekładni falowych**

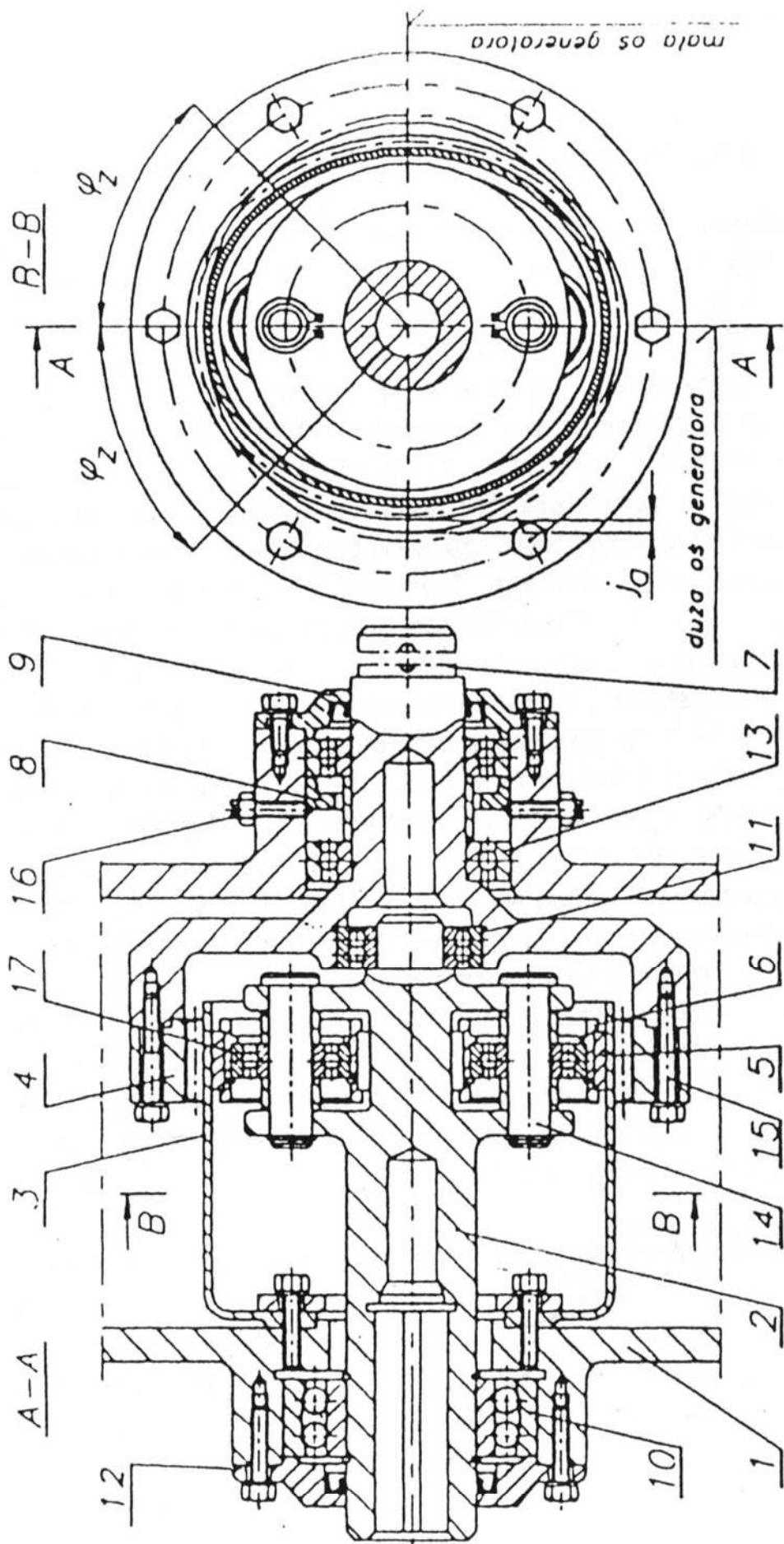
**Instytut Podstaw Budowy Maszyn
Politechnika Warszawska
2001**

Dwufalowa przekładnia zębata

Dwufalową jednostopniową przekładnię zębatą z generatorem dwurołkowym przedstawiono na rys. 1.3. Wałek wejściowy 2 jest łożyskowany w korpusie 1 i kołnierzu wałka wyjściowego 7 za pomocą łożysk 10 i 11. Koło podatne 3, którego korpus ma kształt tulei cienkościennej z dnem, ma uzębienie zewnętrzne znajdujące się przy końcu korpusu koła. Na wałku wejściowym 2 znajdują się dwa kołnierze tworzące korpus generatora. Przez otwory we wspomnianych kołnierzach przechodzą sworznie 14, na które są wciśnięte łożyska toczne 17 podpierające rolki 6 generatora. Na rolki jest nałożony pierścień pośredni 5. Nominalna średnica zewnętrzna tego pierścienia jest równa średnicy nominalnej otworu korpusu koła podatnego. Pierścień 5, nałożony na rolki 6, przybiera kształt zbliżony do elipsy. Pierścień ten odkształca również do takiej samej postaci warstwę obojętną korpusu koła podatnego pod uzębieniem. Wałek wyjściowy 7, podparty w łożyskach 13, jest zabezpieczony przed przemieszczaniem wzdłużnym w korpusie 1 za pomocą pierścienia 8, pokrywki 9 i wkrętów 16. Wieniec zębaty odkształconego koła podatnego zazębia się w dwóch obszarach z kołem sztywnym 4 przykręconym śrubami 15 do kołnierza wałka wyjściowego 7. Oś pionowa na przekroju B-B, w której leżą środki rolek 6, jest jednocześnie dużą osią generatora i pokrywa się z dużą osią elipsy. Mała oś generatora pokrywa się z małą osią elipsy (oś pozioma na przekroju B-B). W pokrywkach 9 i 12 znajdują się pierścienie uszczelniające.

Obszary zazębienia są rozmieszczone powyżej i poniżej małej osi generatora. Środki obszarów zazębienia leżą w dużej osi generatora. Szerokości obszarów zazębienia, przekładni nieobciążonej momentem skręcającym, ograniczają kąty φ_z odmierzane od dużej osi generatora. W małej osi generatora między wierzchołkami zębów koła podatnego i sztywnego występuje luz promieniowy j_u .

Skuteczność stosowania przekładni falowych jest tym wyższa, im większe jest przełożenie, które może w praktyce osiągnąć na jednym stopniu $u = 60+350$. Górna granica przełożenia jednostopniowej falowej przekładni zębatej wynika z małego modułu i małej głębokości przenikania zębów będących w obszarach zazębienia. Wysokość zęba jest porównywalna z odkształceniami promieniowymi koła podatnego spowodowanymi działającymi siłami. Pod wpływem



Rys. 1.3. Dwupolowa przekładnia zębata

obciążenia przekładni dużym momentem skręcającym T_2 ; odkształcenia te mogą spowodować przeskakowanie zębów (buksovanie przekładni), co w efekcie prowadzi do ich szybkiego zniszczenia [12, 21].

Obecnie falowe przekładnie zębate oraz zespoły tych przekładni (koła sztywne, koła podatne, generatory) są wytwarzane seryjnie przez następujące firmy:

- United Shoe Machineri w USA,
- Harmonic Drive System Ltd. w Japonii,
- Harmonicke Prevody w Słowacji.

W Polsce falowe przekładnie zębate są wytwarzane na zamówienie, jednostkowo lub w małych seriach, przez następujące zakłady i instytucje:

- Wytwórnia Sprzętu Komunikacyjnego PZL w Kaliszu,
- Politechnika Warszawska - Instytut Podstaw Budowy Maszyn,
- Politechnika Rzeszowska - Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa.

1.2. Rodzaje falowych przekładni zębatych

Stosując określony typ przekładni, bierze się pod uwagę maksymalny moment skręcający T_2 , jaki może przenieść przekładnia, przełożenie oraz jej sprawność. Często też wybierając określony typ przekładni, bierze się pod uwagę jej rozmiary i ciężar.

Falowe jednostopniowe przekładnie zębate ze stalowymi kołami podatnymi umożliwiają uzyskanie na jednym stopniu przełożeń $u = 60+350$. Aby uzyskać tak duże przełożenia w przekładniach klasycznych, należy stosować przekładnie wielostopniowe. W falowych przekładniach zębatych, podobnie jak w przekładniach planetarnych, występuje wielostrumieniowe przekazywanie energii. W jednym i drugim przypadku zachodzi wieloparowe zazębienie wewnętrzne. W przekładniach planetarnych liczba strumieni przekazywanej energii jest równa liczbie zastosowanych satelitów. Obciążenie z wałka czynnego na bierny jest przenoszone przez wiele par zębów współpracujących kół. W falowych przekładniach zębatych liczba strumieni przekazywanej energii jest równa liczbie fal odkształceń koła podatnego, a liczba par zębów przenoszących obciążenie dochodzi nawet do 50% liczby zębów koła podatnego [29]. Stosunek jednostkowej masy do momentu skręcającego T_2 mieści się w granicach 0,30+0,35 kg/daN·m.

Falowe przekładnie zębate, których schematy kinematyczne, zakresy przełożeń i sprawności podano w tabl. 1.1, można podzielić ze względu na:

- liczbę stopni:
 - jednostopniowe,
 - wielostopniowe,

- rodzaj generatora:
 - z generatorem rolkowym,
 - z generatorem tarczowym,
 - z generatorem krzywkowym.
- typ koła podatnego:
 - koło z korpusem w kształcie tulei cienkościennej z dnem,
 - koło z korpusem w kształcie tulei cienkościennej z kolnierzem,
 - koło z korpusem w kształcie tulei cienkościennej z dwoma wieńcami zębatymi,
 - koło z korpusem w kształcie pierścienia cienkościennego,
- usytuowanie:
 - przekładnia do pracy w położeniu poziomym,
 - przekładnia do pracy w położeniu pionowym,
 - przekładnia do pracy w położeniu skośnym.

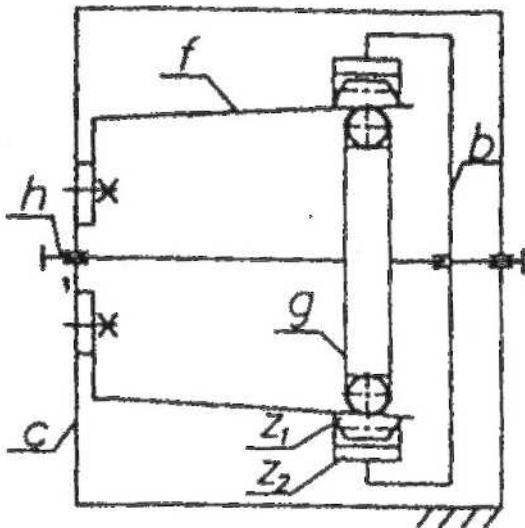
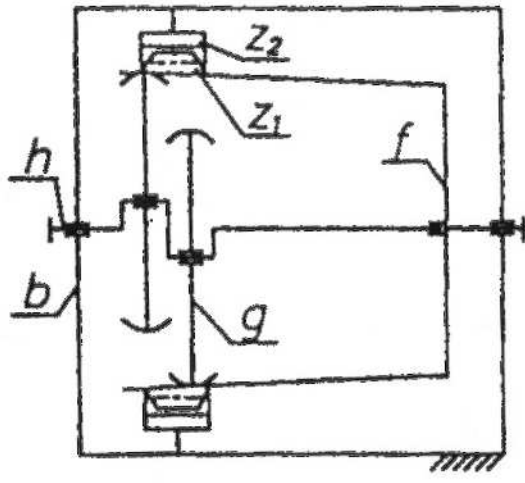
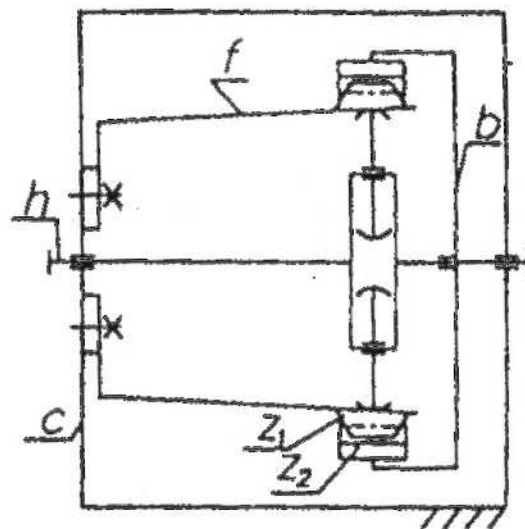
Jednofalowa jednostopniowa przekładnia zębata (tabl. 1.1, poz. 1) ma obrotowe koło podatne f z dnem przykręcone do wałka wyjściowego. Generator jednotarczowy g osadzony na mimośrodku wałka wejściowego h odkształca wieńiec zębata (o liczbie zębów z_1) koła podatnego f , który zazębia się z kołem sztywnym (o liczbie zębów z_2) w jednym obszarze zazębienia. Długość L korpusu koła podatnego wynosi $L = (1+1,2)d_1$.

Jednostopniowe dwufalowe przekładnie zębate (tabl. 1.1, poz. 2+4) z generatorami krzywkowym, dwutarczowym i rolkowym mogą mieć koła podatne obrotowe (połączone z wałkiem wyjściowym) lub nieobrotowe (połączone z korpusem przekładni). Wieńce zębate koła podatnego (o liczbie zębów z_1) i koła sztywnego (o liczbie zębów z_2) zazębiają się w dwóch obszarach zazębienia. Długości L korpusu kół podatnych w tych przekładniach wynoszą $L \geq d_1$.

Tablica 1.1. Rodzaje i wybrane parametry falowych przekładni zębatych

Lp.	Rodzaj przekładni	Schemat kinematyczny	u - przelozenie η - sprawność
1	2	3	4
1.	Jednofalowa z generatorem tarczowym		$u_N^h = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}$ $u = 50+300$ $\eta = 0.7+0.8$

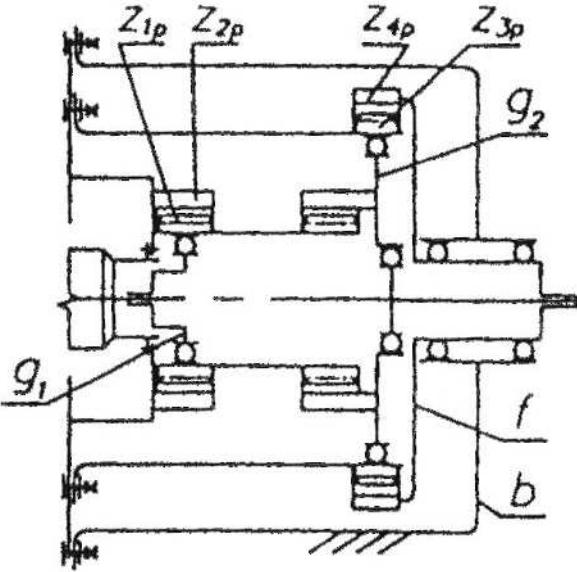
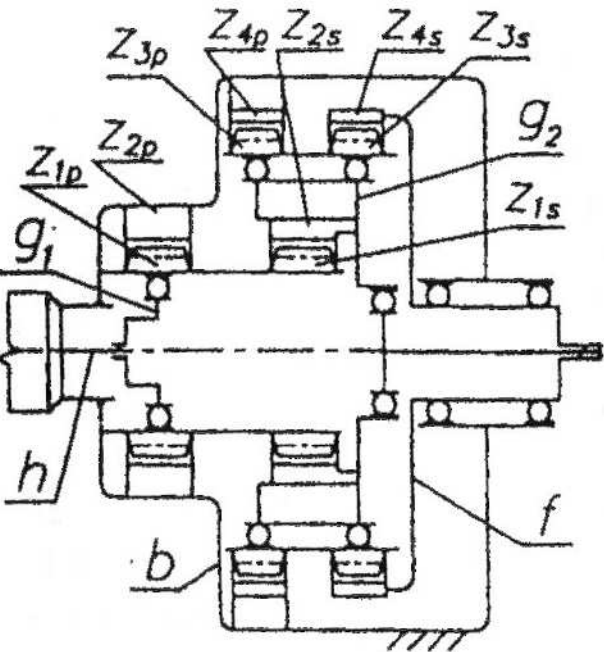
Tablica 1.1 (cd.)

1	2	3	4
2.	Dwufalowa z generatorem krzywkowym		$u = \frac{z_1}{z_2 - z_1}$ $u = 60 + 350$ $\eta = 0.84 + 0.92$
3.	Dwufalowa z generatorem tarczowym		$u = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}$ $u = 60 + 350$ $\eta = 0.82 + 0.9,$
4.	Dwufalowa z generatorem dwu- lub cztero-rolkowym		$u'_{hb} = \frac{z_1}{z_2 - z_1}$ $u = 60 + 150$ $(u = 60 + 300)$ $\eta = 0.75 + 0.85$

Tablica 1 (cd.)

1	2	3	4
5.	Dwufalowa, hermetyczna z generatorem krzywkowym		$u_{hh}^I = \frac{z_1}{z_2 - z_1}$ $u = 60 + 250$ $(u = 60 + 300)$ $\eta = 0.8 + 0.9$
6.	Dwufalowa ze sprzęgłem falowym		$u_{hh}^{bp} = -\frac{z_{1p}}{z_{2p} - z_{1p}}$ $u = 60 + 300$ $\eta = 0.76 + 0.86$
7.	Dwufalowa, podwójna z generatorem krzywkowym		$u = -\frac{u_1 u_2}{u_1 - u_2 + 1}$ $u_1 = -\frac{z_{1p}}{z_{2p} - z_{1p}}$ $u_2 = \frac{z_{4p}}{z_{4p} - z_{3p}}$ $z_{3p} = z_{1p} + 1$ $u = +100000$ $\eta = 0.25 + 0.4$

Tablica 1.1 (cd.)

1	2	3	4
8.	Dwustopniowa, dwufalowa z długimi kołami podatnymi		$u = u_1 \cdot u_2$ $u_1 = -\frac{z_{1p}}{z_{2p} - z_{1p}}$ $u_2 = \frac{z_{4p}}{z_{4p} - z_{3p}}$ $u = 64000 + 80000$ $\eta = 0,35 + 0,55$
9.	Dwustopniowa, dwufalowa z długim i krótkim kołem podatnym		$u = u_1 \cdot u_2$ $u_1 = -\frac{z_{1p}}{z_{2p} - z_{1p}}$ $u_2 = -\frac{z_{3p}}{z_{4p} - z_{3p}}$ $u = 64000 + 80000$ $\eta = 0,35 + 0,55$

Objaśnienie: u_N^b - przełożenie; indeks górny b dotyczy członu unieruchomionego, indeksy dolne h, f wskazują na przekazanie napędu między członami h i f .

Dwufalowa hermetyczna przekładnia zębata (tabl. 1.1, poz. 5) ma wbudowane podatne koło f z dnem i kołnierzem. Wieniec zębaty koła podatnego (o liczbie zębów z_1) jest odkształczany generatorem rolkowym g osadzonym na wałku wejściowym h . Koło sztywne (o liczbie zębów z_2) jest połączone z kołnierzem wałka wyjściowego b . Koło podatne f jest przykręcone do ścianki działowej oddzielającej przestrzeń hermetyczną od otoczenia. Wałek wejściowy h , na którym znajduje się generator g , jest najczęściej przez sprzęgło z wałkiem silnika napędowego. Wałek wyjściowy, którego kołnierz b jest połączony z kołem zębatym z_2 , przekazuje napęd do pomieszczenia hermetycznego.

Długość L korpusu koła podatnego wynosi $L = 2d_1$. Jest to najdłuższe koło podatne, jakie się stosuje w przekładniach falowych.

Dwufalowa jednostopniowa przekładnia zębata (tabl. 1.1, poz. 6) ma koło podatne typu pierścieni, którego korpus ma długość $L \leq 0,5d_1$. Koło to ma dwa wieńce zębate: przekładniowy o liczbie zębów z_{1p} i sprzęgłowy o liczbie zębów z_{1s} . Wspomniane wieńce, po odkształceniu koła podatnego przez generator krzywkowy dwurzędowy, zazębiają się z wieńcami zębatymi kół sztywnych: przekładniowym z_{2p} i sprzęgłowym z_{2s} . Koło sztywne stopnia przekładniowego jest połączone z korpusem przekładni, natomiast koło sztywne sprzęgła jest połączone z wałkiem wyjściowym b_s . Zastosowanie falowego sprzęgła zębatego jest podyktowane tym, że warstwy obojętne korpusu koła podatnego pod użębieniami przekładniowym i sprzęgłowym są odkształcane przez generator do takiej samej postaci.

Dwufalowa podwójna przekładnia zębata (tabl. 1.1, poz. 7) ma wbudowane koło podatne typu pierścieni o długości korpusu $L \leq 0,5d_1$. Koło to ma dwa przekładniowe wieńce zębate z_{1p} , z_{3p} , które po odkształceniu podwójnym generatorem krzywkowym g zazębiają się z wieńcami zębatymi przekładniowych kół sztywnych z_{2p} , z_{4p} . Koło sztywne z_{2p} jest połączone z korpusem, natomiast koło z_{4p} z kołnierzem f wałka wyjściowego. Falowa przekładnia podwójna umożliwia uzyskanie bardzo dużego przełożenia u (do 20000).

Dwufalowa dwustopniowa przekładnia zębata (tabl. 1.1, poz. 8) ma dwa długie koła podatne. Koło podatne pierwszego stopnia ma przekładniowy wieńiec zębata (o liczbie zębów z_{1p}) i sprzęgłowy wieńiec zębata napędzający generator krzywkowy g_2 . Generator krzywkowy g_1 osadzony na wałku silnika odkształca przekładniowy wieńiec zębata zazębiający się z wieńcem zębatym koła sztywnego (o liczbie zębów z_{2p}) połączonym z korpusem b przekładni. Koło podatne drugiego stopnia jest połączone przez kołnierz z korpusem przekładni, natomiast jego wieńiec zębata (o liczbie zębów z_{3p}) odkształcony generatorem g_2 zazębia się z wieńcem zębatym koła sztywnego drugiego stopnia (o liczbie zębów z_{4p}) połączonym z kołnierzem f wałka wyjściowego. Umieszczenie pierwszego stopnia przekładni w kole podatnym drugiego stopnia znacznie skraca wymiary osiowe przekładni, przez co jest bardziej zwarta.

Dwustopniową przekładnię mającą wbudowane dwufalowe stopnie zębate przedstawiono w tabl. 1.1, poz. 9. Koło podatne pierwszego stopnia z długim korpusem ma wieńiec przekładniowy (o liczbie zębów z_{1p}) i wieńiec sprzęgłowy (o liczbie zębów z_{1s}). Koło podatne drugiego stopnia z krótkim korpusem typu pierścieni ma dwa wieńce zębate: przekładniowy (o liczbie zębów z_{3p}) i falowy sprzęgłowy (o liczbie zębów z_{3s}). Sztywne koła zębate stopni przekładniowych (o liczbach zębów z_{2p} i z_{4p}) są połączone z korpusem b przekładni. Koło sztywne sprzęgła falowego (o liczbie zębów z_{4s}) jest połączone z kołnierzem f wałka wyjściowego. Generator g_2 , odkształcający wieńce zębate koła podatnego drugiego stopnia, jest podparty za pomocą łożyska tocznego osadzonego na wałku wciśniętym w wałek wyjściowy przekładni. Prezentowana tu przekładnia ma jesz-

cze mniejsze wymiary i jest bardziej zwarta niż przekładnia opisana poprzednio (tab. 1.1, poz. 8). Konstrukcję przekładni dwustopniowej z długim i krótkim kołem podatnym oraz ze sprzęgłem falowym przedstawiono w części czwartej, rozdz. 9.

Falowe przekładnie zębate są wykonywane jako samodzielne jednostki lub zespoły: koło podatne, koło sztywne oraz generator, służące do późniejszej zabudowy w maszynę lub urządzenie określonego typu. Znajdują one zastosowanie jako:

1. Reduktory i manipulatory do małych obciążeń, w których moment obrotowy T_2 na wale wyjściowym nie przekracza 30 N·m. Do tej grupy można zaliczyć:
 - a) przekładnie o małych prędkościach obrotowych przeznaczone do ręcznego napędu i sterowania,
 - b) przekładnie o dużych prędkościach obrotowych stosowane w przyrządach,
 - c) przekładnie do układów sterowania automatycznego,
 - d) przekładnie przekazujące ruch do pomieszczeń hermetycznych.
2. Przekładnie ogólnego stosowania z kołami podatnymi o średnicach 35+400 mm, przełożeniu $u = 65+350$, momencie na wale wyjściowym 28 kN·m.
3. Przekładnie przenoszące duże momenty obrotowe projektowane do takich maszyn i urządzeń, jak: maszyny budowlane i drogowe, maszyny i urządzenia dźwigowe.

Falowe przekładnie zębate pracują poprawnie w warunkach długotrwałych obciążeń jednokierunkowych, a także krótkotrwałych obciążeń rewersyjnych. W obu przypadkach zezwalają na duże przeciążenia wału wyjściowego momentem skręcającym T_2 . Technologia wytwarzania podstawowych elementów przekładni falowych (zębate koło podatne, zębate koło sztywne, generator określonego rodzaju) jest podobna do technologii wytwarzania elementów klasycznych przekładni zębatych, a tym samym może być szybko opanowana przez zakłady wytwarzające te przekładnie i reduktory.

1.3. Części i zespoły falowych przekładni zębatych

Celem lepszego wprowadzenia w problematykę falowych przekładni zębatych zaprezentowano w tym punkcie konstrukcje głównych części i zespołów tych przekładni, takich jak: koło podatne, koło sztywne stopnia przekładniowego oraz generator krzywkowy, jako jeden z rodzajów generatorów, często stosowany w tego typu przekładniach.

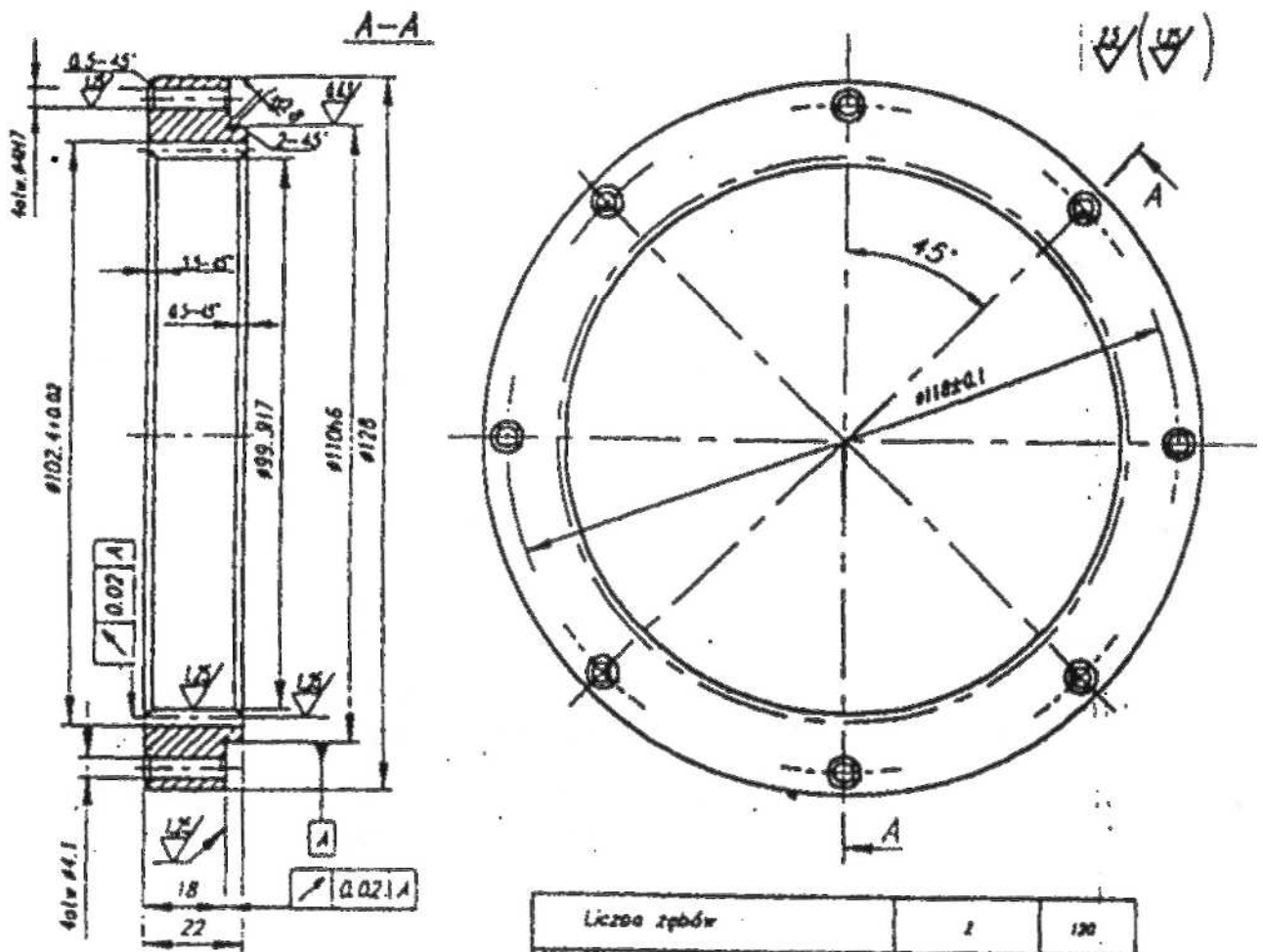
Na rysunku 1.4 przedstawiono koło podatne typu tuleja dwufalowej przekładni zębatej. Korpus tego koła w kształcie cienkościennej tulei ma dwa użębienia zewnętrzne rozmieszczone przy jego końcach. Użębienie stopnia przekładniowego szerokości $b_w = 16$ mm jest oddalone od czoła korpusu koła o 4 mm, natomiast użębienie sprzęgła szerokości 12 mm rozpoczyna się od czoła korpusu koła. Wspomniane użębienia wraz z fragmentami korpusu koła, nad którymi się one znajdują, tworzą tzw. wieńce zębate - przekładniowy i sprzęgłowy. W przedstawionym kole zęby tych wieńców mają jednakowe średnice okręgów wierzchołków i podstaw, a także taką samą liczbę. Zęby obu wieńców mają zarysy ewolwentowe z kątami zarysu $\alpha = 20^\circ$. Ponadto zęby te są niskie, gdyż ich całkowita wysokość $h = 1,025$ mm. Półfabrykat koła, najczęściej w kształcie rury, ulepsza się cieplnie do twardości 30+32 HRC, po czym obrabia się na gotowo powierzchnie wewnętrzne i zewnętrzne. Zęby wieńca przekładniowego nacina się najczęściej na kole nieodkształconym. Pomiary geometryczne użębienia również przeprowadza się na kole będącym w stanie nieodkształconym. Ponieważ tylko wieńiec zębaty stopnia przekładniowego jest odkształcany przez określony rodzaj generatora do zadanej postaci, więc aby nie występowało spiętrzenie naprężeń w tym wieńcu, jego użębienie zaczyna się w pewnej odległości od czoła korpusu.

Wieńiec sprzęgłowy nie jest odkształcany generatorem. Zazębając się z kołem sztywnym sprzęgła, tworzy typowe sprzęgło zębate łącząc koło podatne z korpusem lub wałkiem wyjściowym przekładni. Współczynnik przesunięcia zarysów zębów x , wieńca sprzęgłowego jest taki sam jak współczynnik x , wieńca przekładniowego.

Na rysunku 1.5 przedstawiono koło sztywne, stopnia przekładniowego, przykręcane do kołnierza wałka wyjściowego. Koło to mające $z_2 = 120$ zębów współpracuje z kołem podatnym przedstawionym na rys. 1.3, poz. 3 o liczbie zębów $z_1 = 118$. Zarysy zębów tych kół są ewolwentowe (kąt zarysu $\alpha = 20^\circ$). Przy tak małej różnicy zębów współpracujących kół, aby nie zachodziła między nimi interferencja, zęby obu kół muszą mieć przesunięte zarysy i zmniejszone wysokości. Duży współczynnik x_2 przesunięcia zarysu zębów umożliwia uzyskanie średniego kąta zarysu $\alpha_{tr} \geq 26^\circ$. Obróbka mechaniczna jest przeprowadzana po ulepszeniu cieplnym półfabrykatu koła. Nacinanie zębów odbywa się dłutakiem standardowym, którego współczynnik wysokości głowy zęba $h_{a0}^* = 1,25$.

Do generatorów częściej stosowanych w przekładniach falowych należą generatory krzywkowe jedno- i dwurzędowe. Generator krzywkowy jednorzędowy odkształcający koło podatne 1 z dnem przedstawiono na rys. 1.6. Korpus 3 generatora jest osadzony na wałku wejściowym i połączony z nim za pomocą wpustu (wariant I) lub przywulkanizowany do tarczy 5 (wariant II). Zewnętrzna powierzchnia korpusu 3 ma postać krzywki o ściśle określonym

kształcie. Łożysko podatne 4 po wcisnięciu na korpus generatora 3 odkształciło się, a jego pierścień zewnętrzny stał się również krzywką mającą dwie osie symetrii. Osie te to duża i mała oś generatora zaznaczone na przekroju A-A.



Uwagi:

1. Półkorytal ułożenie cieplnie 30±32 HRC
2. Ostre krawędzie załuszczyć

Liczba zębów	z	120
Moduł	m	0,8
Kąt torysu	α	20°
Koś. wys. głowy zęba	h_a^*	1,2
Koś. przesunięcia torysu	x	1,0

Rys. 1.5. Koło sztywne

Po nałożeniu koła podatnego na łożysko podatne generatora wieniec zębaty tego koła również się odkształcił. Odkształcony wieniec zębaty koła podatnego można włożyć w koło sztywne 2 uzębione wewnątrz. Zęby koła podatnego 1 i sztywnego 2 zazębiają się w dwóch obszarach zazębienia. Maksymalna głębokość przenikania zębów w przekładni nieobciążonej występuje w dużej osi generatora. W małej osi generatora między wierzchołkami zębów koła podatnego i sztywnego występuje luz.

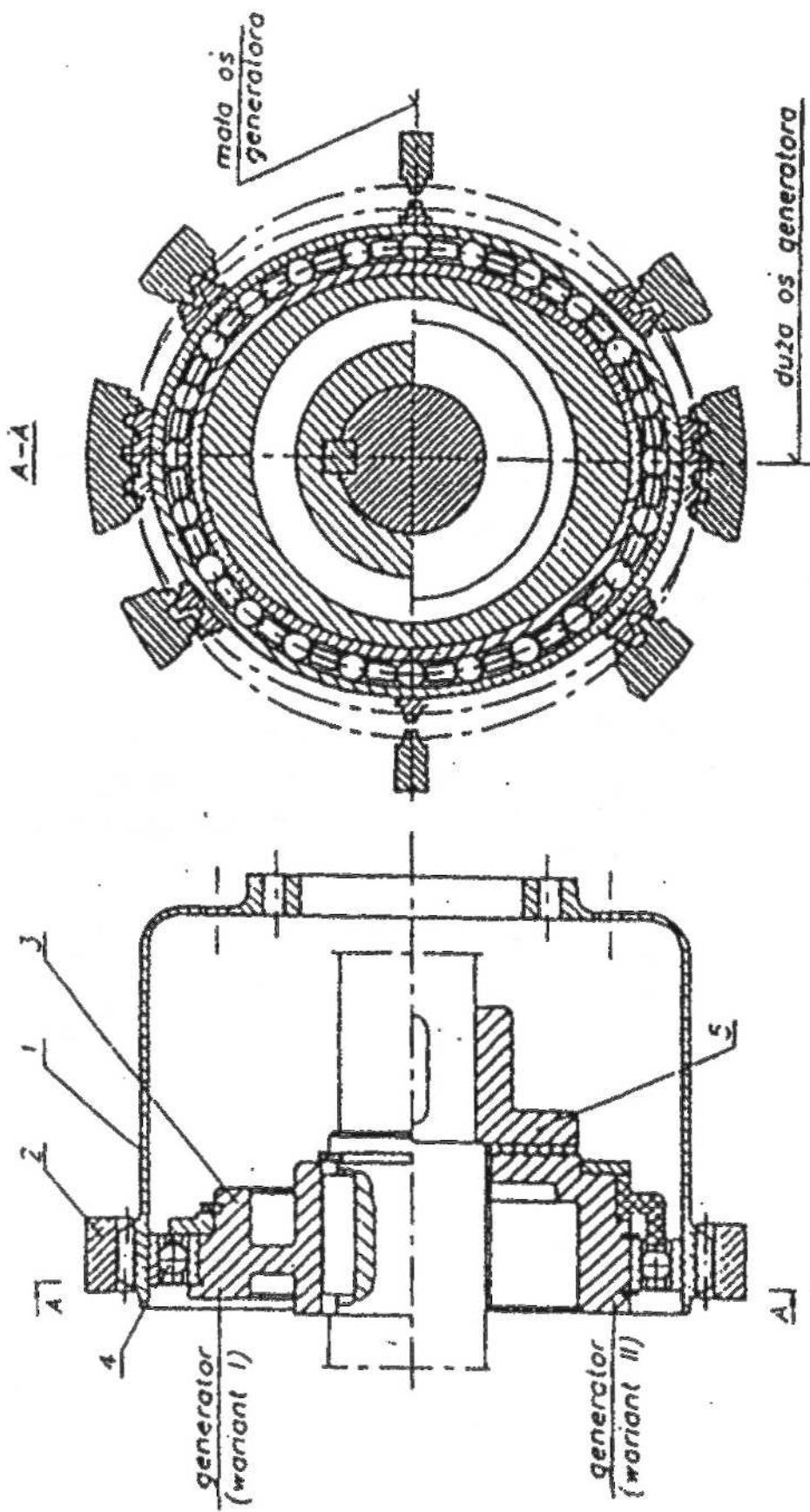
. Koło podatne odkształcone generatorem krzywkowym

Przemieszczenia promieniowe i obwodowe oraz kąt obrotu normalnej do warstwy obojętnej

Stosując generator krzywkowy, można otrzymać żadaną postać odkształcenia warstwy obojętnej korpusu koła podatnego. Jeżeli generator odkształca warstwę obojętną tak, że przemieszczenia promieniowe w punktów tej warstwy, leżących pod kątem φ odmierzanym od dużej osi generatora, dadzą się opisać zależnością

$$w = w_0 \cos 2\varphi \quad (2.129)$$

to przemieszczenia obwodowe v punktów warstwy obojętnej i kąt θ obrotu normalnej, wystawionej do warstwy obojętnej korpusu koła przed odkształceniem go generatorem, można obliczyć wykorzystując zależności (2.35) i (2.46). Po



Rys. 1.6. Generator krzywkowy przekładni dwufalowej: 1 - koło podane, 2 - koło sztywne, 3 - korpus generatora.
4 - łożysko podane, 5 - tarcza

obliczeniach otrzymano wzory służące do wyznaczania przemieszczeń obwodowych

$$v = -0,5w_0 \sin 2\varphi \quad (2.130)$$

i kąta θ obrotu normalnej wystawionej do punktu leżącego na warstwie, pod kątem φ od dużej osi generatora

$$\theta = 1,5 \frac{w_0}{R} \sin 2\varphi \quad (2.131)$$

Przemieszczenia względne promieniowe w/w_0 i obwodowe v/w_0 obliczone z zależności (2.129) oraz (2.130), a także względny kąt obrotu normalnej $\theta R/w_0$, obliczony z zależności (2.131), zestawiono w tabl. 2.7.

Tablica 2.7. Przemieszczenia względne: promieniowe w/w_0 i obwodowe v/w_0 punktów warstwy obojętnej oraz względny kąt $\theta R/w_0$ obrotu normalnej do warstwy obojętnej korpusu koła podatnego odkształconego generatorem krzywkowym zapewniającym przemieszczenia promieniowe tej warstwy zgodnie z równaniem $w = w_0 \cos 2\varphi$

φ [°]	$\frac{w}{w_0}$	$\frac{v}{w_0}$	$\frac{\theta R}{w_0}$ [°]
0	1	0	0
5	0,984807	-0,086825	0,260472
10	0,939692	-0,171011	0,513030
15	0,866025	-0,250000	0,750000
20	0,766044	-0,321394	0,964181
25	0,642787	-0,383023	1,149066
30	0,499999	-0,433013	1,299038
35	0,342020	-0,469847	1,409539
40	0,173648	-0,492404	1,477211
45	0	-0,500000	1,500000
50	-0,173649	-0,492404	1,477211
55	-0,342021	-0,469847	1,409539
60	-0,500001	-0,433013	1,299038
65	-0,642788	-0,383023	1,149066
70	-0,766045	-0,321394	0,964181
75	-0,866026	-0,250000	0,749999
80	-0,939693	-0,171010	0,513030
85	-0,984808	-0,086825	0,260472
90	-1,000000	0	0

Prędkości przemieszczeń punktów warstwy obojętnej i prędkość obrotu normalnej

Wzory na prędkości przemieszczeń punktów warstwy obojętnej otrzymano: na prędkość promieniową V_r - różniczkując zależność (2.129), obwodową V_s - różniczkując zależność (2.130), natomiast prędkość V_θ punktu leżącego na normalnej do warstwy obojętnej w odległości e od tej warstwy obliczono wykorzystując zależności (2.55), (2.56) i (2.131). Końcowe postacie wzorów służących do obliczenia: prędkości promieniowej

$$V_r = 2w_0\omega_G \sin 2\varphi \quad (2.132)$$

prędkości obwodowej

$$V_s = w_0\omega_G \cos 2\varphi \quad (2.133)$$

oraz prędkości punktu leżącego na normalnej

$$V_\theta = -\frac{3w_0\omega_G e}{R} \cos 2\varphi \quad (2.134)$$

Tablica 2.8. Prędkości względne - promieniowa $V_r/\omega_G w_0$ i obwodowa $V_s/\omega_G w_0$ punktów warstwy obojętnej oraz względna prędkość $\theta R/\omega_G w_0 e$ punktu leżącego na normalnej do warstwy obojętnej korpusu koła podatnego odkształconego generatorem krzywkowym zapewniającym przemieszczenia promieniowe tej warstwy zgodnie z równaniem $w = w_0 \cos 2\varphi$

φ [°]	$\frac{V_r}{\omega_G w_0}$	$\frac{V_s}{\omega_G w_0}$	$\frac{\theta R}{\omega_G w_0 e}$
0	0	1,000000	-3,000000
5	0,347296	0,984807	-2,954424
10	0,684040	0,939692	-2,819079
15	1,000000	0,866025	-2,598077
20	1,285575	0,766044	-2,298133
25	1,532089	0,642787	-1,928363
30	1,73205	0,499999	-1,500000
35	1,879385	0,342020	-1,026061
40	1,969615	0,173648	-0,520945
45	2,000000	-0,000001	0
50	1,969615	-0,173649	0,520944
55	1,879385	-0,342021	1,026060
60	1,732050	-0,500001	1,500000
65	1,532088	-0,642788	1,928362
70	1,285574	-0,766045	2,298133
75	0,999999	-0,866026	2,598076
80	0,684040	-0,939693	2,819078
85	0,347296	-0,984808	2,954423
90	-0,000010	-1,000000	3,000000

Prędkości względne punktów warstwy obojętnej - promieniowe $\frac{v_r}{\omega_G w_0}$

i obwodowe $\frac{v_t}{\omega_G w_0}$ oraz względne prędkości $\frac{\theta R}{\omega_G w_0 e}$ punktu leżącego na nor-

malnej do tej warstwy w odległości e od niej, dla różnych kątów φ obrotu generatora, zestawiono w tabl. 2.8.

2.2. Trajektorie punktów warstwy obojętnej koła podatnego

Odształcona przez generator warstwa obojętna korpusu koła podatnego pod uzębieniem ulega przemieszczeniu. Na rysunku 2.4 przedstawiono wycinek warstwy obojętnej koła. Przed odształceniem koła przez generator początek i koniec tego odcinka znajdował się w punktach A_0 i B_0 . Po odształceniu koła punkt A_0 przemieści się w kierunku promieniowym o wartość w , a w kierunku obwodowym o wartość v . Normalna wystawiona do warstwy obojętnej w punkcie A_0 obróciła się o kąt θ (rys. 2.5) po przemieszczeniu się tego punktu do położenia A_1 . Punkt B_0 przemieścił się do położenia B_1 .

Przemieszczenia punktów warstwy obojętnej (rys. 2.5) rozpatrzono w układzie współrzędnych $0uvw$, którego początek 0 znajduje się w punkcie A_0 , warstwy obojętnej korpusu koła przed odształceniem. Przemieszczenia u równoległe do osi koła podatnego nie wpływają na kinematykę przekładni falowej, dlatego też zagadnienie sprowadzono do płaskiego układu współrzędnych uwzględniając tylko przemieszczenia w i v .

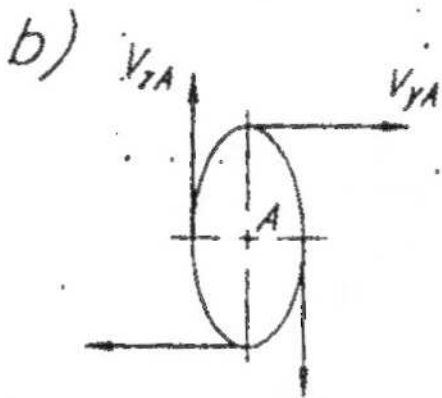
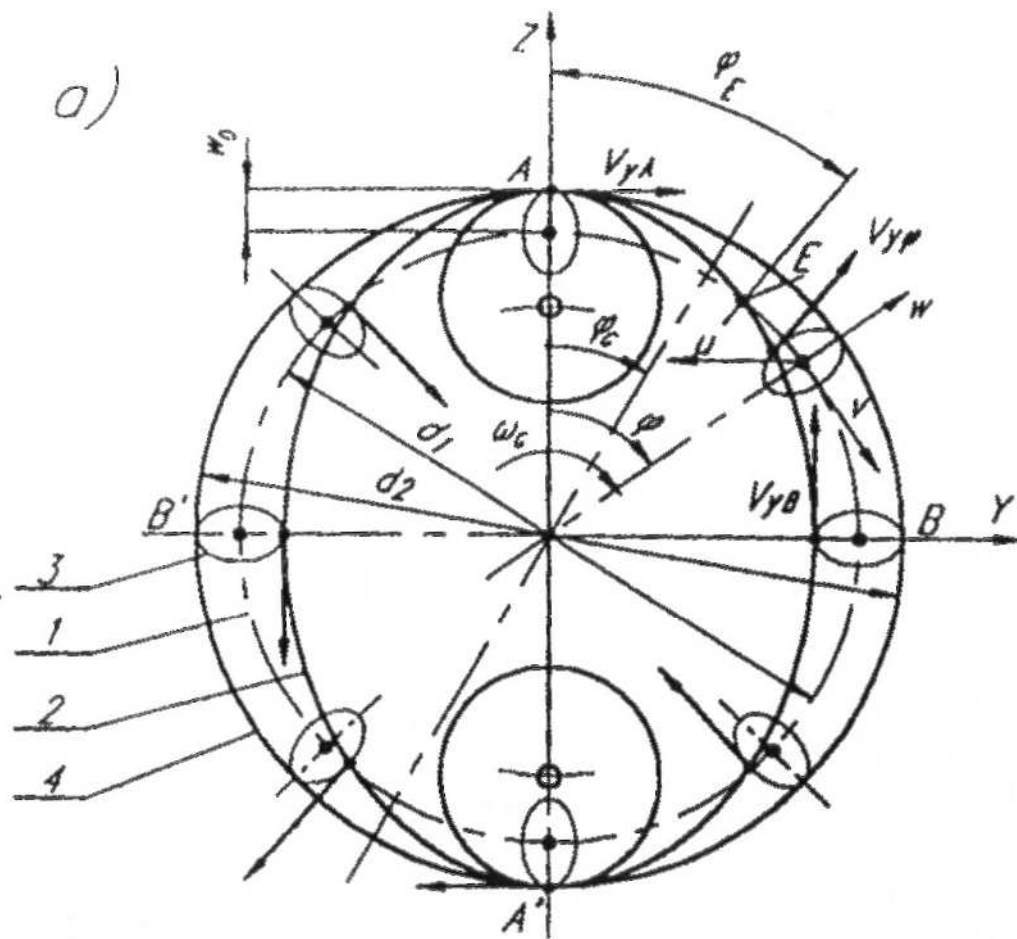
Trajektorie punktów warstwy obojętnej korpusu koła podatnego przedstawiono na rys. 2.7. Jeżeli koło podatne się nie obraca, trajektoria dowolnego punktu tej warstwy jest krzywą zamkniętą i ma kształt pokazany na rys. 2.7b. Trajektorie wszystkich punktów są jednakowe, a ruchy rozpatrywanych punktów różnią się tylko przesunięciem fazowym. Jeżeli koło podatne się obraca, trajektoria ma kształt pokazany na rys. 2.7c.

Generator zapewnia odształcenia promieniowe warstwy obojętnej korpusu koła zgodnie z równaniem

$$w = F_1(\varphi) \quad (2.135)$$

gdzie: φ - kąt, pod którym leży rozpatrywany punkt (rys. 2.7a).

Funkcja $F_1(\varphi)$ powinna być okresowa - okres π dla przekładni dwufalowej - i mieć maksimum w punktach A i A' oraz minimum w punktach B i B' . Korpus koła podatnego jest traktowany jako powłoka cylindryczna, walcowa, której grubość jest znacznie mniejsza (o dwa rzędy wielkości) od średnicy wewnętrznej d_w .



Rys. 2.7. Trajektorie punktów warstwy obojętnej korpusu koła podatnego: a) koła toczone i trajektorie, 1 - okrąg toczny o średnicy d_1 koła podatnego przed odkształceniem, 2 - okrąg toczny koła podatnego po odkształceniu, 3 - trajektoria punktu B' warstwy obojętnej koła podatnego nie obracającego się, 4 - okrąg toczny koła sztywnego; b) trajektoria punktu A warstwy obojętnej koła podatnego, c) trajektoria punktu warstwy obojętnej koła podatnego obracającego się

Przemieszczenia obwodowe v obliczono - zakładając nierozciągłość warstwy obojętnej koła - z równania $\frac{dv}{d\varphi} = -w$

$$v = -\int w d\varphi = F_2(\varphi) \quad (2.136)$$

Równania (2.135) i (2.136) wyrażają statyczną postać warstwy obojętnej korpusu koła podatnego. Przy obrocie generatora z prędkością kątową ω_G , położenie bieżące rozpatrywanego punktu, w odniesieniu do dużej osi generatora w chwili t , określa kąt φ

$$\varphi = \varphi_1 - \omega_G t \quad (2.137)$$

Podstawiając zależność (2.137) do równań (2.135) i (2.136), otrzymano wyrażenie na przemieszczenia promieniowe i obwodowe

$$\begin{aligned} w &= F_1(\varphi_1 - \omega_G t) \\ v &= F_2(\varphi_1 - \omega_G t) \end{aligned} \quad (2.138)$$

Równania (2.138) opisują trajektorie punktu leżącego pod kątem początkowym φ_1 , a ruch rozpatrywanego punktu jest spowodowany obrotem generatora. Dla punktów A i B warstwy obojętnej leżących na dużej i małej osi generatora $w_A = w_0$ oraz $w_B = -k_p w_0$, k_p - stała, zależna od postaci odkształcenia koła podatnego. Jeżeli odkształcenie warstwy obojętnej korpusu koła podatnego opisuje równanie $w = w_0 \cos 2\varphi$, to stała $k_p = 1$.

Prędkości promieniowe V_{ZA} i V_{ZB} są sobie równe oraz wynoszą

$$V_{ZA} = V_{ZB} = \frac{dw}{dt} = 0 \quad (2.139)$$

a prędkości styczne

$$\left. \begin{aligned} V_{YA} &= w_0 \omega_G \\ V_{YB} &= -k_p w_0 \omega_G \end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

Punkty A i B przemieszczają się w przeciwnych kierunkach.

We wspomnianym generatorze krzywkowym, dla punktu E leżącego pod kątem $\varphi = 45^\circ$, prędkość promieniowa i styczna wynoszą

$$\left. \begin{aligned} V_{ZE} &= \max \\ V_{YE} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

2.3. Przełożenie przekładni

Generator odkształca warstwę obojętną korpusu koła podatnego tak, że w jego dużej osi maksymalne przemieszczenie promieniowe wynosi w_0 , a różnica średnic toczonego koła sztywnego i podatnego jest równa

gdzie: d_{w2} - średnica toczna koła sztywnego,
 d_{w1} - średnica toczna koła podatnego.

Przełożenie przekładni falowej można wyznaczyć jak dla przekładni planetarnej, stosując metodę Willis'a:

$$(\omega_1 - \omega_G)(\omega_2 - \omega_G) = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} \quad (2.143)$$

gdzie: ω_1 - prędkość kątowa koła podatnego,
 ω_2 - prędkość kątowa koła sztywnego.

Przekształcając zależność (2.143), otrzymuje się:
dla nieruchomego koła podatnego ($\omega_1 = 0$)

$$i = \frac{\omega_G}{\omega_2} = \frac{d_{w2}}{(d_{w2} - d_{w1})} = \frac{d_{w2}}{2w_0} \quad (2.144)$$

dla nieruchomego koła sztywnego ($\omega_2 = 0$)

$$i = \frac{d_1}{d_{w2} - d_{w1}} = \frac{d_{w1}}{2w_0} = \frac{d_{w1}}{\Delta} \quad (2.145)$$

W falowych przekładniach zębatych koło sztywne jest uzębione wewnątrz, a koło podatne jest uzębione zewnątrz. W przekładni dwufalowej, w jednym obszarze zazębienia, zęby odkształconego koła podatnego, na kącie około 120° , wchodzi na różne głębokości we wręby międzyzębne koła sztywnego. Przy kącie 90° , licząc od dużej osi generatora, między wierzchołkami zębów kół występuje luz promieniowy (rys. 2.8).

Jeżeli średnice toczne kół d_{w1} i d_{w2} w zależnościach (2.144) i (2.145) zapisze się jako

$$d_{w1} = m_w z_1; \quad d_{w2} = m_w z_2 \quad (2.146)$$

gdzie: m_w - moduł toczny, to przełożenie u przekładni będzie równe:

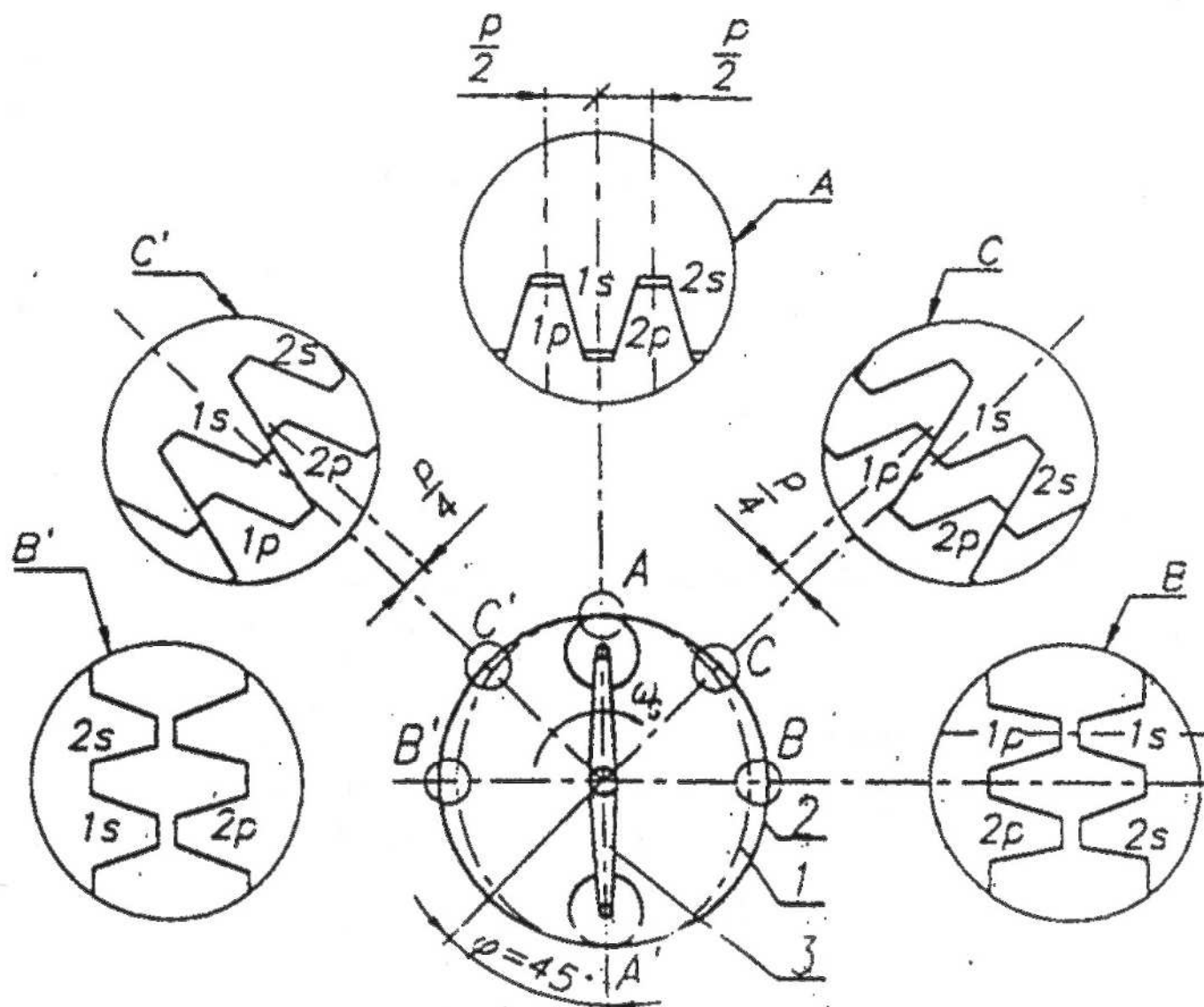
- gdy koło podatne jest nieruchome

$$u = \frac{z_2}{(z_2 - z_1)} \quad (2.147)$$

- gdy koło sztywne jest nieruchome

$$n = -\frac{z_1}{(z_2 - z_1)} \quad (2.148)$$

Różnica zębów $z_2 - z_1$ jest równa liczbie fal odkształceń n_f koła podatnego, a ta może wynosić 1, 2, 3,...



Rys. 2.8. Wzajemne położenia zębów koła podatnego i sztywnego: szczegół A - położenie zębów w dużej osi generatora, szczegół B - położenie zębów w małej osi generatora, szczegół C - położenie zębów będących pod kątem $\varphi = \pi/4$; 1p, 2p - rozpatrywane zęby koła podatnego, 1s, 2s - rozpatrywane zęby koła sztywnego

Podczas obrotu generatora następuje ruch względny kół, a zęby koła podatnego przechodzą z jednego wrębu do drugiego. Po dokonaniu pełnego obrotu przez generator, gdy koło podatne się nie obraca, ząb koła podatnego przemieści się o n_f podziałek. Najczęściej liczba fal odkształcenia wynosi

$$n_f = z_2 - z_1 = 2 \quad (2.149)$$

• wtedy przełożenie przekładni dwufalowej wynosi:

- gdy koło podatne jest nieruchome

$$u = \frac{\xi_2}{2} \quad (2.150)$$

- gdy koło sztywne jest nieruchome

$$u = -\frac{\xi_1}{2} \quad (2.151)$$

Analizując ruch zębów, można stwierdzić, że w zębatej przekładni falowej zazębia się jednocześnie znaczna liczba zębów. Praktyczna liczba jednocześnie współpracujących par zębów w obciążonej przekładni może wynosić 20+50% liczby zębów koła podatnego. Zależy to od postaci odkształcenia koła podatnego i parametrów wieńców zębatych współpracujących kół. Dzięki temu zębate przekładnie falowe z kołami o małym module mogą przenosić znaczne obciążenia, mając jednocześnie małe gabaryty.

2.4. Przekształcenie ruchu w zębatej przekładni falowej

Na rysunku 2.9 pokazano powierzchnie boczne współpracujących zębów z zarysami ewolwentowymi. W punkcie styku zębów na promieniu r_{y2} prędkości promieniową V_y i obwodową V_{y1} zęba koła podatnego, odkształconego generatorem określonego typu, oblicza się z zależności podanych w punkcie 2.1 tego rozdziału.

Prędkość obwodowa koła sztywnego V_{y2} zależy od przełożenia przekładni i da się obliczyć z równania

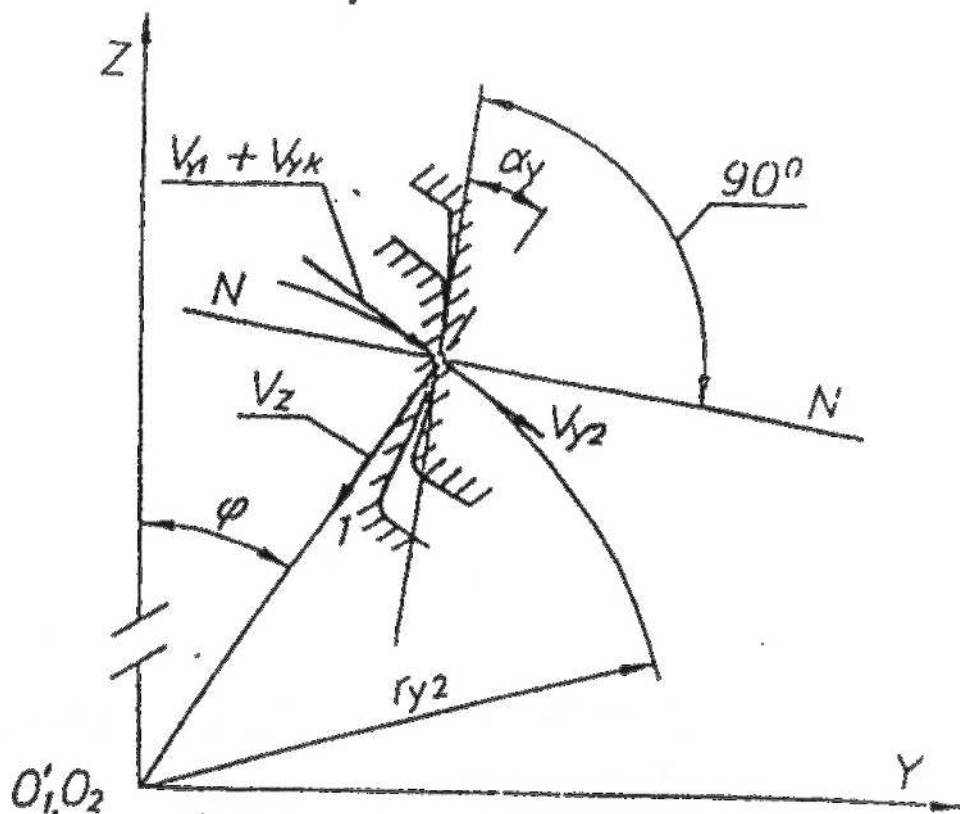
$$V_{y2} = \frac{\omega_G r_{y2}}{i} \quad (2.152)$$

Prędkość obwodowa V_{y1} punktu styku zęba koła podatnego jest sumą prędkości

$$V_{y1} = V_y + V_0 \quad (2.153)$$

gdzie: V_y - prędkość obwodowa punktu warstwy obojętnej leżącej pod kątem φ ,

V_0 - prędkość obrotu normalnej do warstwy obojętnej.



Rys. 2.9. Wektory prędkości zębów w punkcie styku: V_{y1} - prędkość obwodowa zęba koła podatnego, V_z - prędkość promieniowa zęba koła podatnego, V_{y2} - prędkość obwodowa zęba koła sztywnego, $N-N$ - normalna do zarysu zęba koła sztywnego, O_1' - środek obrotu odkształconego koła podatnego, O_2 - środek obrotu koła sztywnego

Prędkość V_{y1} jest przekazywana bezpośrednio na ząb koła sztywnego, natomiast prędkość promieniowa V_z przekształca się w obwodową V_{yk} na skutek ślizgania się zębów po sobie (efekt klinowy)

$$V_{yk} = V_z \operatorname{tg} \alpha_y \quad (2.154)$$

gdzie: α_y - kąt zarysu zęba koła sztywnego w punkcie styku.

Zatem prędkość obrotowa V_{y2} zęba koła sztywnego wynosi

$$V_{y2} = V_{y1} + V_{yk} \quad (2.155)$$

Zależności (2.154) i (2.155) pozwalają wyznaczyć kąt zarysu zęba koła sztywnego w punkcie styku leżącym pod kątem φ - odmierzanym od dużej osi generatora

$$\operatorname{tg} \alpha_y = \frac{V_{y2} - V_{y1}}{V_z} \quad (2.156)$$

Wartość prędkości V_{y1} i V_{y2} zmienia się zależnie od kąta φ obrotu generatora:

- dla $\varphi = 0$ V_{y1} - osiąga wartość maksymalną,
- $V_z = 0$, brak jest ruchu względnego,
- α_y - kąt zarysu może być dowolny, nawet zero.

V_r - osiąga wartość maksymalną,

α_r - kąt zarysu zgodny z zależnością (2.156).

dla $45^\circ < \varphi < 90^\circ$

V_{r1} - zmienia znak (przyjmuje wartości ujemne),

V_r - zmienia się od maksimum do zera,

α_r - rośnie (dla $\varphi \rightarrow 90^\circ$, $\alpha_r \rightarrow 90^\circ$ ruch możliwy tylko dzięki efektowi klinowemu).

Celem zmniejszenia zużycia zębów i strat tarcia w zazębieniu należy dążyć do zmniejszenia skutków efektu klinowego. Efekt ten będzie mały, jeżeli parametry zazębienia tak się dobierze, aby zazębienie się odbywało w zakresie małych kątów φ lub jeśli zastosuje się zęby z zarysami kołowo-lukowymi [16, 17, 20, 83].

2.5. Droga względna zęba koła podatnego stopnia przekładniowego

Koła zębate przekładni falowych mogą mieć zęby o różnych zarysach powierzchni bocznej. Jednak najczęściej stosuje się zęby z zarysami ewolwentowymi, gdyż są one technologiczne, a współpraca zębów z takimi zarysami w tych przekładniach jest poprawna. Przy dużej liczbie zębów kół i małym module kształt zęba z zarysem ewolwentowym jest zbliżony do trapezu. Zęby z takimi kształtami pokazano na rys. 2.10.

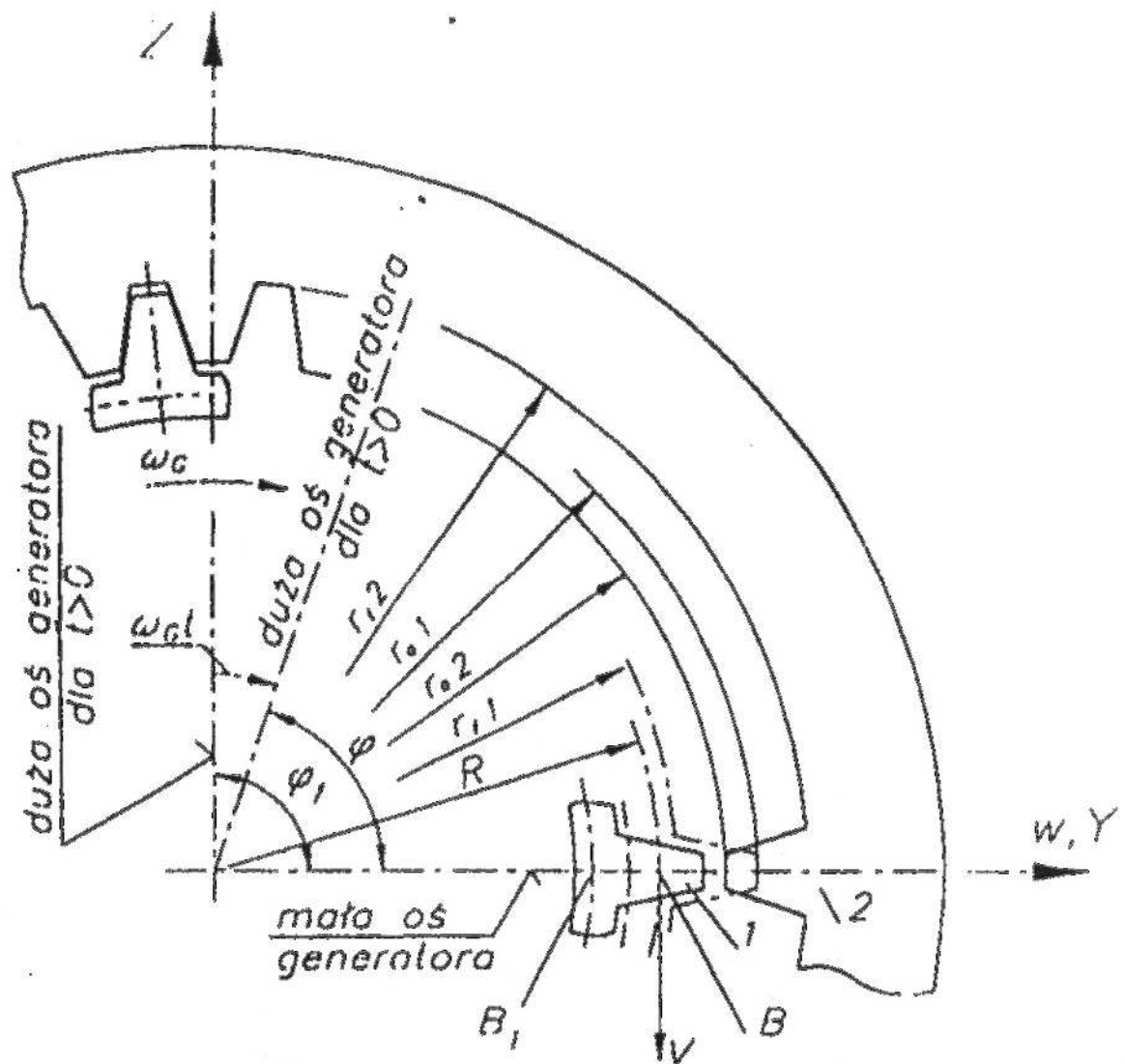
Na rysunku 2.10 przedstawiono wzajemne położenie zębów w małej osi generatora w chwili $t = 0$. Oś Z pokrywa się z osią symetrii zęba koła sztywnego 2 i z osią wrębu międzyzębego koła podatnego 1. Początek układu współrzędnych Ovw leży na małej osi generatora, na przecięciu nieodkształconej warstwy obojętnej o promieniu R z osiami zębów.

W chwili początkowej $t = 0$ kąt początkowy $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, a duża oś generatora pokrywa się z osią Z . W czasie $t > 0$ duża oś generatora obróci się o kąt $\omega_G t$. Bieżące położenie dużej osi generatora określa kąt

$$\varphi = \varphi_1 - \omega_G t = \frac{\pi}{2} - \omega_G t \quad (2.157)$$

Przy nieruchomym kole podatnym koło sztywne obróci się o kąt φ_2

$$\varphi_2 = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{i} \quad (2.158)$$



Rys. 2.10. Wzajemne położenie zębów na małej osi generatora w chwili $t = 0$.
 Z - duża oś generatora, Y - mała oś generatora, v, w - układ współrzędnych,
 w którym jest rozpatrywany ruch względny zębów, R - promień warstwy
 obojętnej koła podatnego nieodkształconego, r_{a1} , r_{a2} - promienie okręgów
 wierzchołków, r_{f1} , r_{f2} - promienie okręgów podstaw

Położenie zęba koła sztywnego w układzie współrzędnych 0_{wv} określa się obliczając współrzędne punktów G i H przecięcia osi tego zęba z okręgami wierzchołków i podstaw (rys. 2.11). Tak więc punkt G ma współrzędne v_{a2} , w_{a2} ; natomiast punkt H ma współrzędne v_{f2} , w_{f2} . Współrzędne w_{a2} i w_{f2} oblicza się z zależności

$$w_{a2} = r_{a2} \mp R; \quad w_{f2} = r_{f2} - R \quad (2.159)$$

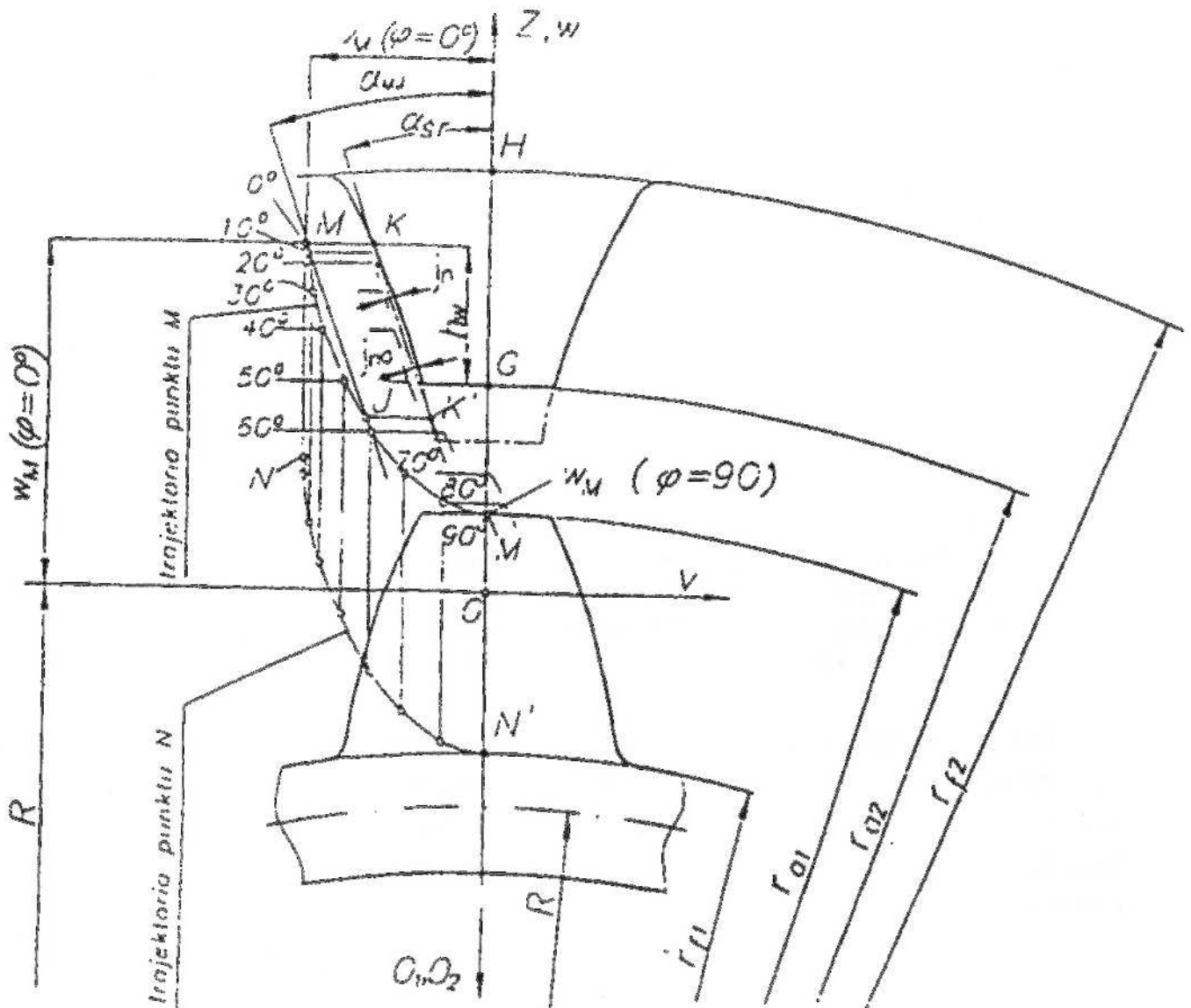
a współrzędne tych punktów v_{a2} i v_{f2} leżących na osi v wynoszą $v_{a2} = v_{f2} = 0$.

Położenie zęba koła podatnego zmienia się z obrotem generatora. Położenie to w układzie współrzędnych 0_{wv} określono obliczając współrzędne punktów M i N przecięcia osi tego zęba z okręgami wierzchołków i podstaw. Punkt M ma współrzędne v_{a1} i w_{a1} , natomiast punkt N ma współrzędne v_{f1} i w_{f1} . Współrzędne tych punktów dla różnych kątów φ obrotu generatora oblicza się z zależności

$$\left. \begin{aligned} w_{u1} &= (r_{u1} + w) \cos \varphi_2 - R \\ w_{f1} &= (r_{f1} + w) \cos \varphi_2 - R \end{aligned} \right\} \quad (2.160)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{u1} &= v + (r_{u1} - R) \theta - (r_{u1} + w) \varphi_2 \\ v_{f1} &= v + (r_{f1} - R) \theta - (r_{f1} + w) \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.161)$$

Jeżeli koło sztywne się unieruchomi, a obrót o kąt φ_2 przekaże na koło podatne, to wzajemne położenia zębów (droga względna zęba koła podatnego), przy różnych kątach φ obrotu generatora, będą takie jak pokazano na rys. 2.11.

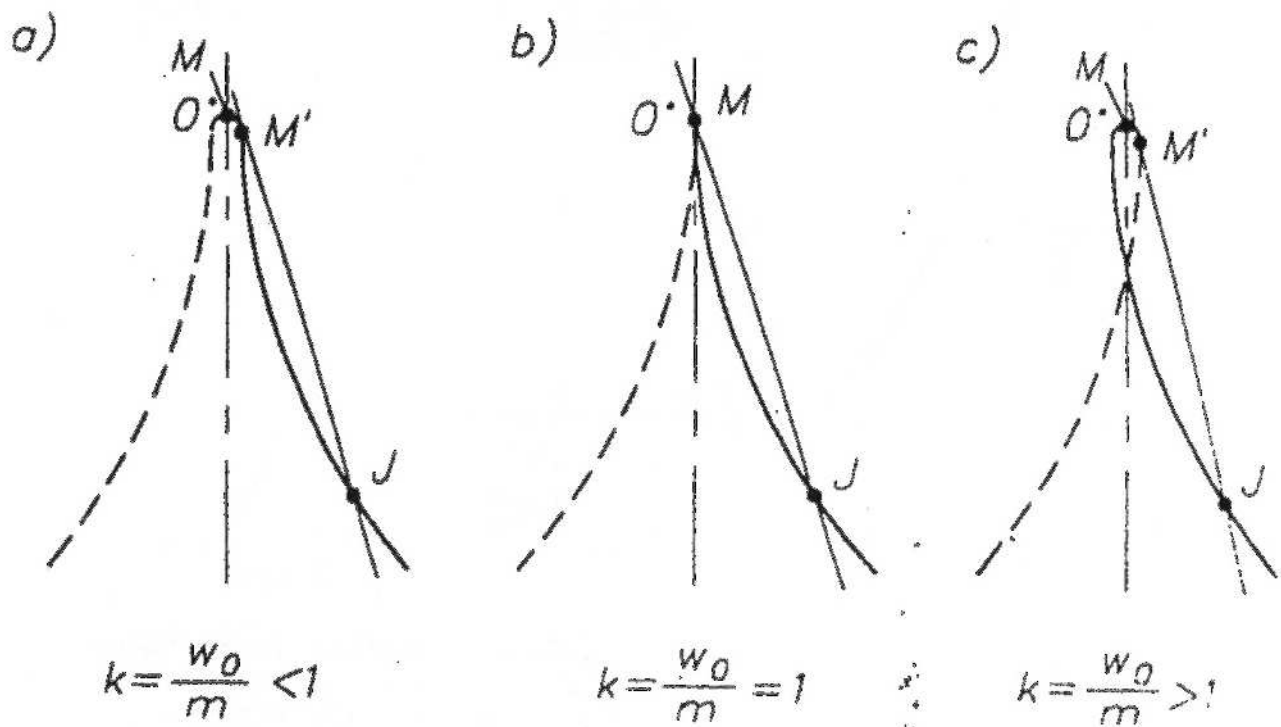


Rys. 2.11. Droga względna zęba koła podatnego: j_n, j_{no} - luzy boczne w zazębieniu, h_w - maksymalna głębokość zazębienia

Na rysunku 2.11 przedstawiono trajektorie punktów M i N oraz luzy normalne j_n między krawędzią u wierzchołka zęba koła podatnego a powierzchnią boczną zęba koła sztywnego. Luz j_{no} - dodatni - między wierzchołkami zębów podczas wychodzenia koła podatnego z obszaru zazębienia (na rys. 2.11 dla

kąta $\varphi \approx 50^\circ$) informuje o braku interferencji między zębami. Wspomniane luzy zależą od drogi względnej zęba koła podatnego, którą określają trajektorie punktów M i N . Na trajektorii punktu M naniesiono punkt J , którego współrzędne v_{01} i w_{01} zostały obliczone dla takiego kąta φ obrotu generatora, przy którym wierzchołek K zęba koła podatnego styka się w punkcie K' z zębem koła sztywnego. Przez punkty K i K' wykreślono prostą, która jest nachylona do osi zęba koła sztywnego pod kątem α_{01} . Kąt α_{01} jest średnim kątem zarysu zęba koła sztywnego na wysokości przenikania.

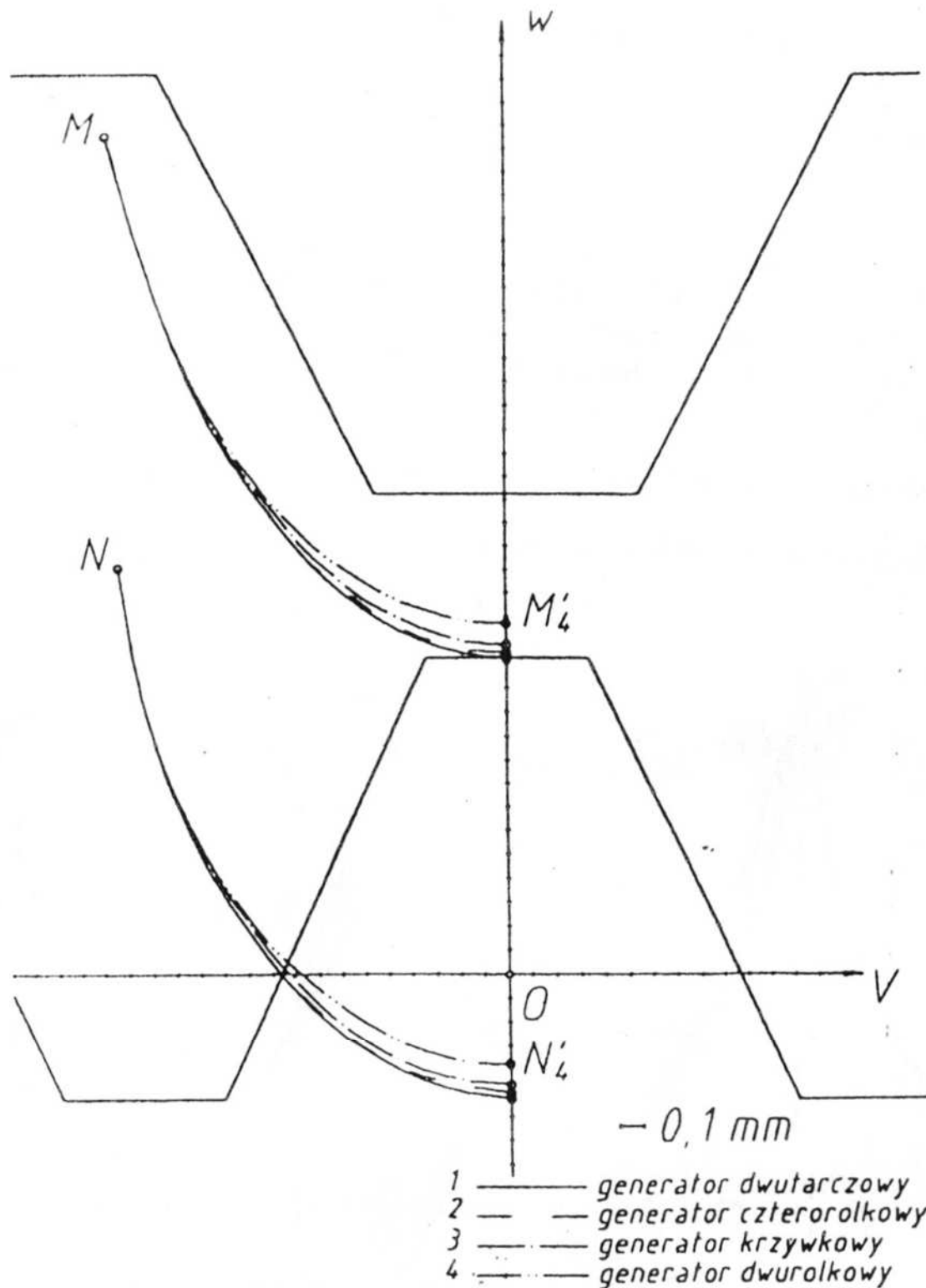
Kształty trajektorii punktów M i N zależą od rodzaju generatora odkształcającego koło podatne oraz od współczynnika odkształcenia promieniowego k określanego stosunkiem $k = \frac{w_0}{m}$. Kształty trajektorii punktu M dla różnych wartości współczynnika k przedstawiono na rys. 2.12.



Rys. 2.12. Trajektorie punktu w_{01} zęba koła podatnego.

Przy współczynniku $k = 1$ trajektoria punktu M (rys. 2.12b) ma kształt klina. Ze wzrostem kąta φ obrotu generatora wzrasta również intensywność oddalania się punktów trajektorii od dużej osi generatora. Ząb koła podatnego wchodzi we wręby międzyzębne nie doznając dodatkowych odkształceń, przez co nie wzrastają naprężenia w wieńcu koła podatnego.

Przy wartościach $k < 1$ (rys. 2.12a) trajektoria u wierzchołka jest wyokrąglona. Między zębami znajdującymi się w dużej osi generatora występuje luz obwodowy. Współczynnik $k < 1$ można stosować w przekładniach mających przełożenia w dolnych granicach, ponieważ naprężenia w wieńcu zębatym koła pochodzące od zginania generatorem są najmniejsze. W przekładniach o przeło-



Rys. 2.13. Trajektorie punktów M i N drogi względnej zęba koła podatnego

przełożeniach $i < 100$, na etapie ich projektowania, przyjmuje się $k \geq 1$, go obciążeniu tych przekładni, na skutek kasowania luzów w łańcuchu kinem nym generator-koło podatne-koło sztywne, wartość tego współczynnika n Przy współczynniku $k > 1$ trajektoria punktu M (rys. 2.12c) podczas obr neratora zatacza pętlę. Najpierw oddala się od dużej osi generatora w lew czym przechodzi na stronę prawą. Ząb koła podatnego dodatkowo się od ca, co powoduje wzrost naprężeń w wieńcu koła.

W tabelicy 2.9 zestawiono wyniki obliczeń współrzędnych w_n i v_n drogi względnej punktu M oraz w_f i v_f punktu N zęba koła podatnego przekładni pokazanej na rys. 7.20. Koło podatne o parametrach uzębienia podanych w punkcie 2.2 było odkształcane różnymi rodzajami generatorów, a mianowicie: krzywoliniowym, tarczowym, czterorolkowym i dwurołkowym. Maksymalne przemieszczenie promieniowe w_0 warstwy obojętnej korpusu koła pod uzębieniem było ujemne i wyniosło $w_0 = -1,1$ m.

Porównując między sobą wartości współrzędnych w_n , v_n , w_f i v_f drogi względnej punktów M i N można zauważyć, że dla kątów φ obrotu generatora leżących w przedziale $\varphi = 0 \div 45^\circ$ stosowne współrzędne, w przypadku różnych generatorów odkształcających koło, różnią się nieznacznie. Różnice te są większe w odniesieniu do kątów $\varphi > 45^\circ$.

Trajektorie punktów M i N zęba koła podatnego odkształconego różnymi generatorami przedstawiono na rys. 2.13.